الدرس 9

قوانين الاحتمالات

1. العد

حل بعض مسائل العد يدفعنا في أغلب الأحيان للجواب عن السؤال التالي :

إذا كانت E مجموعة مكونة من n عنصر و P عدد طبيعي معطى، كم طريقة نستطيع بها تكوين قوائم ذات P عنصر من E ؟

مثال . ♦

نرمي قطعة نقدية ثلاث مرات متتالية وفي كل رمية نسجل على الترتيب الجهة التي نراها. علما أن P يمثل ظهر القطعة و F وجهها.

يمكننا التعبير عن النتيجة المتحصل عليها بالعبارة : FFP ، PFF ، ...

ـ العبارة FFP تعني أننا تحصلنا على الوجه F في الرميتين الأولى والثانية، وعلى الظهر P في الرمية الثالثة.

ما هي النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

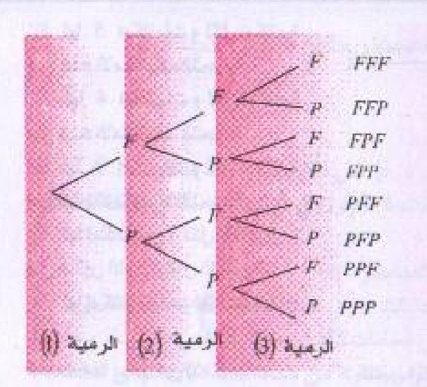
✓ الحل :

نرمز بـ E للمجموعة $\{F, P\}$. ونقوم بكتابة كل القوائم ذات ثلاثة عناصر المأخوذة من بين العنصرين P و F.

هناك طريقتان لتعيين هذه القوائم :

ـ طريقة الشجرة :

لإيجاد كل النتائج الممكنة (عدد القوائم) نعد الفروع النهائية لهذه الشجرة فنجدها 8 فروع.



إذن هناك 8 إمكانيات.

ـ هناك طريقة بسيطة لتعيين عدد الإمكانيات وذلك باستعمال المبدأ الأساسي للعد (الجداء):

إذا تفرع كل فرع رئيسي من شجرة إلى عدد من الفروع وإذا تفرعت هذه الأخيرة إلى عدد آخر أو يساويه من الفروع وهكذا دواليك،

فإن عدد الفروع النهائية تساوي جداء مختلف هذه الأعداد.

وفي هذه الحالة يصبح عدد الحالات الممكنة هو :

$2\times2\times2=2^3=8$

ـ طريقة ملء الخانات :

نقوم بملء كل خانة من الخانات الثلاث 1 ، 2 و 3 بالحرف P أو الحرف F وهذا استنادا للمبدأ الأساسي للعد (الجداء) الموضح سابقا في الشجرة.

ولكي نتحصل على عدد الامكانيات نتبع ما يلي :

هناك امكانيتان لملأ الخانة (1)

ومن اجل كل امكانية للخانة (1) يكون لدينا امكانيتان للخانة (2)

إذن هناك (2×2) امكانية لملأ الخانتين (1) و (2) ،

ومن اجل كل امكانية للخانتين (1) و(2) يكون لدينا امكانيتان للخانة (3)

وبما ان عدد الامكانيات للخانتين (1) و(2) هو 2×2 فإن عدد الحالات الممكنة لملأ الخانة (1) و(2) و(3) معا هو $(2\times2)\times2$ اي $2^3=8$.

1.1 المبدأ الأساسي للعد

قاعدة الجداء

إذا كانت التجربة E_1 لها n_1 امكانية و لكل امكانية من هذه الإمكانيات كانت التجربة E_2 لها n_2 امكانية وهكذا ... حتى التجربة E_K التي لها n_K من الامكانيات. فإن التجارب E_1 و .... ، E_K تحدث معا بعدد من الامكانيات يساوي $n_1 n_2 \times.....\times n_K$

مثال . ♦

نريد أن نرتب خمسة متسابقين بحيث لا يحتل اي واحد منهم نفس الرتبة مع الآخر. كم طريقة نستطيع بها ترتيب هؤلاء المتسابقين ؟

✓ الحل :

نرمز إلى المتسابقين بـ A ، B ، C ، D ، E و لتكن Ω

حيث $\Omega=\{A,B,C,D,E\}$

عدد الترتيبات هو عدد القوائم ذات الخمسة العناصر المختلفة مثنى مثنى من Ω.

(1) $n_1=5$: A ، B ، C ، D ، E — (2) $n_2=4$: B ، C ، D ، E — (3) $n_3=3$: C ، D ، E — (4) $n_4=3$: D ، E — (5) $n_5=1$: E

التجربة E_1 — التجربة E_2 — التجربة E_3 — التجربة E_4 — التجربة E_5

E_1 لها 5 امكانيات و لكل امكانية من هذه الامكانيات التجربة E_2 لها 4 امكانيات و لكل امكانية من هذه الامكانيات التجربة E_3 لها 3 امكانيات و لكل امكانية من هذه الامكانيات التجربة E_4 لها امكانيتين و لكل امكانية من هاتين الامكانيتين التجربة E_5 لها امكانية واحدة. و عليه فإن التجارب E_1 ، E_2 ، ... ، E_5 تحدث معا بعدد من الامكانيات يساوي $5\times4\times3\times2\times1=120$.

إذن عدد الطرق التي يمكن أن نرتب بها هؤلاء المتسابقين هو 120 .

لاحظ هنا أن عدد عناصر Ω هو $n=5$ و عدد عناصر كل قائمة هو $P=5$.

- قاعدة المجموع :

إذا كانت الأحداث A_1 ، A_2 ، ... ، A_k غير متلائمة مثنى مثنى من التجارب E_1 ، E_2 ، ... ، E_k على الترتيب. وكانت أيضا n_1 ، n_2 ، ... ، n_k عدد إمكانيات A_1 ، A_2 ، ... ، A_k على الترتيب فإن عدد إمكانيات الحادث (A_1 أو A_2 أو ... أو A_k) هو $n_1+n_2+......+n_k$.

مثال .

A_1 ، A_2 ، A_3 حوادث معرفة كما يلي :

A_1 " x عدد طبيعي بحيث $x \le 2$ "

A_2 " x عدد طبيعي بحيث $2 < x \le 3$ "

A_3 " x عدد طبيعي بحيث $4 \le x \le 7$ "

أوجد عدد الحالات الممكنة للحادث " x عدد طبيعي و $x \le 7$ "

الحل :

الحادث " x عدد طبيعي و $x \le 7$ " نعبر عنه ب :

(x عدد طبيعي و $x \le 2$) أو (x عدد طبيعي و $2 < x \le 3$) أو (x عدد طبيعي و $4 \le x \le 7$)

أي ب (A_1 أو A_2 أو A_3).

عدد امكانيات A_1 هو 3 وعدد امكانيات A_2 هو 1 وعدد امكانيات A_3 هو 4

الحوادث A_1 ، A_2 ، A_3 غير متلائمة مثنى مثنى، وحسب قاعدة المجموع فإن عدد امكانيات الحادث المطلوب هو $3+1+4=8$

قوائم عناصر مجموعة

في كل ما يلي E مجموعة غير خالية و n عدد عناصرها.

أ) تبديلة مجموعة

كل قائمة ذات n عنصر من E عناصرها مختلفة مثنى مثنى تسمى تبديلة لـ E .

مثال .

E مجموعة حيث $E=\{a,b,c,d\}$

القوائم (a,b,c,d) ، (a,c,d,b) ، (a,d,c,b) هي ثلاث تبديلات مختلفة لـ E .

العنصر d موجود في الرتبة الرابعة في القائمة الأولى وفي الرتبة الثالثة في القائمة الثانية وفي الرتبة الثانية في القائمة الثالثة.

إذن في كل قائمة يجب مراعاة ترتيب العناصر .

ولكتابة اي تبديلة لـ E نقوم بملء 4 خانات t,x,y,z حيث كل خانة تشمل حرفا وحيدا وكل الحروف الظاهرة على الخانات تكون مختلفة مثنى مثنى.

ـ هناك اربع امكانيات لملء الخانة (t) ولكل امكانية من هذه الامكانيات تبقى ثلاث امكانيات للخانة (x) ، إذن توجد 4×3 امكانية لملء الخانتين (t) و (x) ، ولكل واحدة منها تبقى امكانيتان للخانة (y) إذن توجد $(4\times3)\times2$ امكانية لملء الخانات (t) و (x) و (y) ولكل واحدة منها تبقى امكانية واحدة للخانة الرابعة.

إذن توجد $4\times(3\times2\times1)=24$ امكانية (تبديلة) لملء الخانات t,x,y,z .

(t)	(x)	(y)	(z)
4 اختيارات	3 اختيارات	2 اختيارات	1 اختيار

- عدد التبديلات :

عدد تبديلات مجموعة E مشكلة من n عنصر حيث $n \ge 1$ يساوي $n(n-1)\times...\times2\times1$

ونرمز لهذا العدد بـ $n!$ و يقرأ " n عاملي" ونكتب $n(n-1)(n-2)\times...\times2\times1=n!$

نصطلح ان $0!=1$

ملاحظة

يمكن إثبات هذه القاعدة باستعمال طريقة ملء الخانات

$n!$ هو عدد طرق ترتيب عناصر مجموعة مكونة من n عنصر.

ب) الترتيبة

ترتيبة p عنصر من E هي قائمة ذات p عنصر مختلفة مثنى مثنى. و $1 \le p \le n$

مثال .

$E=\{a,b,c,d\}$

الثلاثيات (a,b,c) ، (a,b,d) ، (a,c,d) هي قوائم من E عناصرها مختلفة مثنى مثنى و بالتالي فهي ترتيبات ذات ثلاثة عناصر من E .

وللحصول على عدد هذه الترتيبات نستعمل ملء ثلاث خانات x, y, z .
بحيث يكون للخانة الأولى 4 امكانيات وللخانة الثانية 3 امكانيات وللخانة الثالثة امكانيتين :

(z)	(y)	(x)
2	3	4

إذن توجد $24=(4\times3\times2)$ امكانية لملء الخانات x, y, z
ومنه فإن عدد الترتيبات ذات ثلاثة عناصر هو 24 .

عدد الترتيبات

إذا كانت E مجموعة تشمل n عنصرا بحيث $n \ge 1$ فإن عدد ترتيبات P عنصر من E $(n \ge p \ge 1)$ هو $n(n-1)...\times(n-(p-1))$

ملاحظة

لاحظ ان $\dfrac{n!}{(n-p)!}=n(n-1)\times...\times(n-(p-1))$

ج) قائمة p عنصر من E مع التكرار

بما ان التكرار ممكن فإن لكل خانة من الخانات المرقمة من 1 إلى p لها n امكانية (اختيار)
وبالتالي عدد الامكانات الكلي هو $\underbrace{n\times n\times...\times n}_{p \text{ عاملا}}$ أي n^p .

ومنه تكون لدينا القاعدة التالية :
p عدد طبيعي كيفي
بحيث $p \ge 1$.
عدد هذه القوائم هو n^p .

p	2	1
n اختيارات	n اختيارات	n اختيارات

مثال -

$E=\{1,2,3,4\}$ ، $p=5$ ، $n=4$
عدد القوائم ذات 5 عناصر التي يمكن تشكيلها من E مع التكرار هي $4^5=1024$

تمرين تدريبي 1

كيس يحتوي على 12 كرة كتب على كل منها حرفا من حروف المجموعة $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$ نسحب على التوالي ثلاث كرات بدون ارجاع ونسجل في كل مرة الحرف الذي يظهر على الكرة على الترتيب.
كم من كلمة لها معنى أو ليس لها معنى نستطيع تشكيلها من ثلاثة حروف ؟

✓ الحل :

تشكيل كلمة يعني ملء ثلاث خانات مرقمة من 1 إلى 3 .
لدينا 12 امكانية لملء الخانة الأولى ، ومن اجل كل امكانية من هذه الامكانيات توجد 11 امكانية لملء الخانة 2
إذن يكون لدينا 12×11 امكانية لملء الخانتين 1 و 2.

ومن اجل كل امكانية من هذه الامكانيات توجد 10 امكانيات لملء الخانة 3 .
إذن يكون لدينا $(12\times11)\times10$ امكانية لملء الخانات 1 ، 2 ، 3 .
وعليه عدد الامكانيات (عدد الكلمات) الكلي هو 1320 .

تمرين تدريبي 2

نعتبر الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، ... ، 8 ، 9 .
1- كم عددا مؤلفا من 9 ارقام مختلفة يمكن تشكيله من الأرقام المعطاة ؟
2- كم عددا مؤلفا من اربعة ارقام يمكن تشكيله، بحيث يكون رقم الافه زوجيا ؟
3- كم عددا فرديا يمكن تشكيله بالأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، ... ، 8 ، 9 ؟

✓ الحل :

1) عدد الأعداد المشكلة من 9 ارقام مختلفة من المجموعة المعطاة هو $9!=362880$

2) لتكوين عدد مؤلف من 4 ارقام،
بحيث رقم الآلاف زوجي من المجموعة المعطاة نتبع طريقة ملء الخانات.
بما أن رقم الآلاف زوجي فإن الخانة (أ) لها 4 امكانيات ومن اجل كل امكانية من هذه الامكانات فإن الخانة (م) لها 9 امكانيات.

و	ع	م	أ
9 إختيارات	9 إختيارات	9 إختيارات	4 إختيارات

إذن لدينا (4×9) امكانية لملء الخانتين (أ) و (م).
ومن اجل كل امكانية من هذه الامكانيات لدينا 9 امكانيات لملء الخانة (ع)
فيصبح لدينا $(4\times9)\times9$ امكانية لملء الخانات (أ) ، (م) ، (ع).
ومن اجل كل امكانية من هذه الامكانات لدينا 9 امكانيات لملء الخانة (و)
فيكون لدينا $(4\times9\times9)\times9=2916$ امكانية لملء الخانات الأربع.
وبالتالي عدد الأعداد التي رقم الافها زوجي والمشكلة من المجموعة المعطاة هو 2916 .

3) يكون العدد فرديا إذا كان رقم آحاده فرديا (أحد هذه الأرقام 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9).
إذن الخانة (و) لها 5 امكانيات وكل خانة من الخانات الأخرى لها 9 إمكانيات.
إذن عدد الأعداد الفردية هو :
$5\times9\times9\times9=3645$

و	ع	م	أ
5 إختيارات	9 إختيارات	9 إختيارات	9 إختيارات

3.1 التوفيقات

E مجموعة عدد عنصرها n و p عدد طبيعي بحيث $n \ge p \ge 0$.
توفيقة p عنصر من E هي مجموعة جزئية من E تشمل p عنصرا.

مثال -

لتكن E مجموعة حيث $E=\{a,b,c\}$.

التوفيقات ذات عنصرين من E هي المجموعات $\{a,b\}$ ، $\{a,c\}$ ، $\{b,c\}$.

ملاحظة

ترتيب العناصر في المجموعة الجزئية ليس مهما.
مثال على ذلك $\{a,b\}$ ، $\{b,a\}$ يمثلان نفس المجموعة.

ترميز

عدد المجموعات الجزئية (عدد التوفيقات) ذات p عنصر من مجموعة ذات n عنصر نرمز له ب $\binom{n}{p}$ أو C_n^p ويقرأ " p من بين n "

C_n^p هو عدد الطرق (الامكانيات) لاختيار p عنصرا مختلفا من مجموعة ذات n عنصرا.

مثال -

في المثال السابق $\binom{3}{2}=C_3^2=3$

مبرهنة

من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي p ، بحيث $n \geq p \geq 0$

لدينا $C_n^p=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}=\frac{n\,(n-1)\times...\times[n-p+1]}{p!}$

الإثبات

إذا رتبنا p عنصرا مختارا من E بكل الطرق الممكنة فإن عدد هذه التراتيب هو :
$L=n\,(n-1)\times...\times[n-p+1]$.

وبما ان توفيقة p عنصر هي مجموعة جزئية غير مرتبة من E إذن لها $p!$ طريقة لترتيب عناصرها.

وللحصول على عدد التوفيقات نقسم L على $p!$ فنجد $C_n^p=\frac{n\,(n-1)\times...\times[n-p+1]}{p!}$

لكن $n\,(n-1)(n-2)\times...\times(n-p+1)=\frac{n!}{(n-p)!}$

العلاقة السابقة تصبح $C_n^p=\frac{n!}{p!\,(n-1)!}$

خواص

n و p عددان طبيعيان مع $p \leq n-1$

1) $C_n^0=C_n^n=1$ ، 3) $C_n^1=C_n^{n-1}=n$ مع $(n \geq 1)$

2) $C_n^p=C_n^{n-p}$ ، 4) $C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p}=C_n^p$

الإثبات

لتكن E مجموعة جزئية تشمل n عنصرا.

1) المجموعة E تحتوي على مجموعة خالية وعلى مجموعة وحيدة عدد عناصرها n .
إذن $C_n^0=C_n^n=1$

2) إذا كانت A مجموعة جزئية من E تشمل p عنصرا ،
فإن المجموعة المتممة لـ A والتي نرمز لها بـ $\overline{A}$ تشمل $n-p$ عنصرا.
إذن عدد المجموعات الجزئية ذات p عنصرا يساوي عدد المجموعات الجزئية ذات $(n-p)$ عنصرا وعليه $C_n^p=C_n^{n-p}$.
ويمكن أن نثبت هذه المساواة بالحساب اي :

$$C_n^{n-p}=\frac{n!}{(n-(n-p))!\,(n-p)!}=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}=C_n^p$$

3) بوضع $p=1$ في العلاقة $C_n^p=C_n^{n-p}$ نجد $C_n^1=C_n^{n-1}$

4) ليكن a عنصرا من E ، من بين C_n^p مجموعة ذات p عنصر من E هناك مجموعات تشمل a وليكن x عددها ، والتي لا تشمل a وليكن y عددها.

من الواضح أن $x+y=C_n^p$

حساب x :

المجموعات ذات p عنصر والتي تشمل a ، تشمل كذلك $p-1$ عنصرا من بين $n-1$ عنصر من E من غير a. وعليه $x=C_{n-1}^{p-1}$

حساب y :

المجموعات ذات p عنصر والتي لا تشمل a ، تشمل p عنصرا مختارا من بين $n-1$ عنصر من E من غير a. وعليه $y=C_{n-1}^{p}$

إذن $C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p}=C_n^p$

ويمكن أن نثبت هذه المساواة بالحساب :

$$C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p}=\frac{(n-1)!}{(n-p)!\,(p-1)!}+\frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!}$$

$$=\frac{p\times(n-1)!}{(n-p)!\,p!}+\frac{(n-p)\times(n-1)!}{p!\,(n-p)!}$$

$$=\frac{(n-1)!\,(p+n-p)}{p!\,(n-p)!}=\frac{n\times(n-1)!}{p!\,(n-p)!}=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}=C_n^p$$

المثلث العددي (مثلث باسكال)

الجدول التالي يسمح لنا بحساب C_n^p باستعمال العلاقة $C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p}=C_n^p$

فمثلا $C_1^0+C_1^1=C_2^1$

- قيمة C_n^p هي القيمة الموجودة في الخانة الناتجة من تقاطع السطر n والعمود p .

فمثلا $C_2^1=1+1=2$

$C_4^2=3+3=6$

$C_3^2=2+1=3$

n \ p	0	1	2	3	4
0	1				
1	1 +	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

تمرين تدريبي 1

1- عين كل الأعداد a_p بحيث $a_p = C_6^p$. وبحيث p يأخذ القيم من 0 إلى 6 ،

ثم تحقق أن $\sum_{p=0}^{6} a_p = 2^6$

2- استنتج الأعداد b_p بحيث $b_p = C_7^p$ و بحيث p يأخذ القيم من 0 على 7

واحسب $\sum_{p=0}^{7} b_p$

✓ الحل :

1) حسب الخاصية (1) لدينا $a_0 = a_6 = 1$ وحسب الخاصية (3) لدينا $a_1 = a_5 = 6$

$$a_2 = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6\times5}{1\times2} = 15$$

$$a_3 = C_6^3 = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6\times5\times4}{3\times2} = 5\times4 = 20$$

$$a_4 = C_6^4 = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6\times5}{2} = 15$$

$$\sum_{p=1}^{6} a_p = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 2 + 12 + 15 + 20 + 15 = 64 = 2^6$$

2) نستعمل الخاصية (4) لحساب الأعداد b_p .

$$b_0 = C_7^0 = 1$$

$$b_1 = C_7^1 = C_6^0 + C_6^1 = a_0 + a_1 = 1 + 6 = 7$$

$$b_2 = C_7^2 = C_6^1 + C_6^2 = a_1 + a_2 = 6 + 15 = 21$$

$$b_3 = C_7^3 = C_6^2 + C_6^3 = a_2 + a_3 = 15 + 20 = 35$$

$$b_4 = C_7^4 = a_3 + a_4 = 20 + 15 = 35$$

$$b_5 = C_7^5 = a_4 + a_5 = 15 + 6 = 21$$

$$b_6 = C_7^6 = a_5 + a_6 = 6 + 1 = 7$$

$$b_7 = C_7^7 = 1$$

$$\sum_{p=0}^{7} b_p = 1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128 = 2^7$$

تمرين تدريبي 2

كيس يحتوي 8 كرات بيضاء و 13 كرة حمراء نسحب 3 كرات في آن واحد.

1- ما هو عدد السحبات الممكنة ؟

2- ما هو عدد السحبات التي تشمل كرتين بيضاويتين وواحدة حمراء ؟

✓ الحل :

1) عدد السحبات الممكنة هو عدد المجموعات الجزئية ذات ثلاثة عناصر المشكلة من المجموعة ذات 21 عنصر (عدد الكرات البيضاء و الحمراء). ويساوي $C_{21}^3 = 1330$

2) توجد $C_8^2 = 28$ امكانية لاختيار كرتين بيضاويتين من بين 8 كرات بيضاء.

يوجد C_{13}^1 امكانية لاختيار كرة حمراء من بين 13 كرة حمراء.

من أجل كل امكانية لاختيار كرتين بيضاويتين توجد 13 امكانية لاختيار كرة حمراء

ومنه العدد الكلي هو $28\times13 = 364$.

إذن عدد الامكانيات للحصول على كرتين بيضاويتين وكرة حمراء هو 364 .

4.1 دستور ثنائي الحد

مبرهنة

من أجل كل عددين مركبين a و b ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$:

$$(a+b)^n = C_n^0\, a^n b^0 + C_n^1\, a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^p\, a^{n-p} b^p + \ldots + C_n^n\, a^0 b^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^p b^{n-p}$$

ملاحظة

1) يمكنك إثبات هذا الدستور بالتراجع n .

2) $\sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^{n-p} \times b^p = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^p\, b^{n-p}$.

نتيجة

عدد المجموعات الجزئية المكونة من مجموعة ذات n عنصر هو 2^n .

لأنه بوضع $a=1$ و $b=1$ في دستور ثنائي الحد نجد :

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^p + \ldots + C_n^n$$

إذا كانت E مجموعة تشمل n عنصرا و إذا كان $0 \leq p \leq n$ فإن: C_n^p هو عدد المجموعات الجزئية لـ E ذات p عنصر.

إذن $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$ أي 2^n هو عدد المجموعات الجزئية لـ E .

تمرين تدريبي 1

انشر الأعداد التالية $A = (x-1)^4$ ، $B = (2+i)^4$ ، $C = (2x-3y)^4$.

✓ الحل :

$$A = (x-1)^4 = (x+(-1))^4 = \sum_{p=0}^{4} C_4^p\, x^p\, (-1)^{4-p}$$

$$= C_4^0 x^0 (-1)^4 + C_4^1 x^1 (-1)^3 + C_4^2 x^2 (-1)^2 + C_4^3 x^3 (-1)^1 + C_4^4 x^4 = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4$$

$$B = (2+i)^4 = C_4^0 2^0 i^4 + C_4^1 2^1 i^3 + C_4^2 2^2 i^2 + C_4^3 2^3 i^1 + C_4^4 2^4 i^0$$

$$= 1 - 8i - 24 + 32i + 16 = -7 + 24i$$

$$C = (2x - 3y)^4 = \sum_{p=0}^{4} C_4^p (2x)^p \times (-3y)^{4-p}$$

$$= C_4^0 (-3y)^4 + C_4^1 2x (-3y)^3 + C_4^2 (2x)^2 (-3y)^2 + C_4^3 (2x)^3 (-3y) + C_4^4 (2x)^4$$

$$= 81y^4 - 216xy^3 + 216x^2y^2 - 96x^3y + 16x^4$$

تمرين تدريبي 2

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (x+1)^n$ مع n عدد طبيعي غير معدوم.

1- اعط نشرا لـ $f(x)$ ، ثم استنتج $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$

2- باستعمال مشتق الدالة f ، احسب بدلالة n المجموع S حيث $S = \sum_{k=1}^{n} k\, C_n^k$.

✓ الحل :

1) حسب دستور ثنائي الحد نجد $f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \times 1^{n-k} = \sum_{0}^{n} x^k C_n^k$

لدينا من جهة $f(1) = 2^n$ ومن جهة اخرى $f(1) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$ إذن $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

2) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x) = n(x+1)^{n-1}$ ومن جهة اخرى لدينا ، $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \times k\, x^{k-1}$.

لدينا $f'(1) = n \times 2^{n-1}$ ومن جهة اخرى $f'(1) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \times k = S$

إذن $S = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \times k = n \times 2^{n-1}$

2 - قوانين الاحتمالات المتقطعة

♦ مثال -

نرمي مرة واحدة حجر نرد متزن ونهتم بالحادث الوحيد " ظهور الرقم 2 " ،
نقول عندئذ اننا حققنا إختبار برنولي.
نسمي تحقيق الحادث الذي نهتم به بـ " نجاح " ونرمز له بـ S .والحادث العكسي له

يسمى " رسوب " والذي نرمز له بـ $\overline{S}$
عندما نعيد أربع مرات مستقلة عن بعضها البعض اختبار برنولي، نقول عندئذ اننا حققنا تجربة برنولي.
ليكن X متغير عشوائي قيمه عدد مرات تحقق S في الرميات الأربع.
كل مخرج من هذه التجربة هو قائمة من أربعة أحرف ماخوذة من المجموعة $\{S, \overline{S}\}$.

1) ما هي قيم X المكنة ؟

2-ا) احسب احتمال الحادث $(X=0)$

ب) احسب احتمال الحادث $(X=4)$

3-ا) احسب احتمال التحصل على $(S, \overline{S}, \overline{S}, \overline{S})$

ب) كم توجد من قائمة مشكلة من حرف S وثلاثة احرف $\overline{S}$ ؟
ثم استنتج احتمال الحادث $(X=1)$

4) ماهو عدد القوائم التي تحقق الحادث $(X=2)$ ؟ ثم استنتج $P(X=4)$

ب) احسب $P(X=3)$ ثم اعط قانون احتمال X .

✓ الحل :

1) قيم X المكنة هي $4, 3, 2, 1, 0$

2) ا) $(X=0)$ هو الحادث " عدم ظهور رقم 2 " في الأربع رميات
إذن $(X=0)$ هو الحادث $(\overline{S} \cap \overline{S} \cap \overline{S} \cap \overline{S})$
وبما ان الرميات مستقلة عن بعضها البعض فإن

$$P(X=0) = P(\overline{S} \cap \overline{S} \cap \overline{S} \cap \overline{S})$$
$$= P(\overline{S})\, P(\overline{S}) \times P(\overline{S})\, P(\overline{S}) = \left(P(\overline{S})\right)^4$$
$$= (1 - P(S))^4 = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$$

ب) $(X=4)$ هو الحادث " ظهور الرقم 2 " في الأربع رميات وهو $S \cap S \cap S \cap S$

إذن $P(X=4) = (P(S))^4 = \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296}$

3) ا) الحادثة $(S, \overline{S}, \overline{S}, \overline{S})$ هي الحادثة $S \cap \overline{S} \cap \overline{S} \cap \overline{S}$

إذن $P(S, \overline{S}, \overline{S}, \overline{S}) = P(S)\left(P(\overline{S})\right)^3 = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{1296}$

ب) توجد 5 قوائم مشكلة من حرف S وثلاثة أحرف $\overline{S}$.

$\bullet\!-\!\overline{S}\bullet\!-\!S\bullet\!-\!\overline{S}\bullet\!-\!\overline{S}$ ، $\bullet\!-\!S\bullet\!-\!\overline{S}\bullet\!-\!\overline{S}\bullet\!-\!\overline{S}$

$\bullet\!-\!\overline{S}\bullet\!-\!\overline{S}\bullet\!-\!\overline{S}\bullet\!-\!S$ ، $\bullet\!-\!\overline{S}\bullet\!-\!\overline{S}\bullet\!-\!S\bullet\!-\!\overline{S}$

هناك اربعة مسالك لها نفس الاحتمال التي تحقق الحادث $(X=1)$ وحسب قاعدة احتمال حادث

نجد $P(X=1) = 4 \times P(S, \overline{S}, \overline{S}, \overline{S}) = 4 \times \frac{125}{1296} = \frac{500}{1296}$

4) أ) $(X=2)$ هو الحادث ظهور رقم 2 مرتين.

$\bullet\!-\overline{S}\bullet\!-S\bullet\!-\overline{S}\bullet\!-S$ ، $\bullet\!-S\bullet\!-S\bullet\!-\overline{S}\bullet\!-\overline{S}$

$\bullet\!-\overline{S}\bullet\!-\overline{S}\bullet\!-S\bullet\!-S$ ، $\bullet\!-S\bullet\!-\overline{S}\bullet\!-S\bullet\!-\overline{S}$

$\bullet\!-\overline{S}\bullet\!-S\bullet\!-S\bullet\!-\overline{S}$ ، $\bullet\!-S\bullet\!-\overline{S}\bullet\!-\overline{S}\bullet\!-S$

عدد القوائم هو 6 لأنه توجد ستة مسالك تحقق الحادث $(X=2)$ وهذه المسالك لها نفس الاحتمال .

إذن $P(X=2)=6\times P(S,S,\overline{S},\overline{S}) \ =6\times(P(S))^2\times(P(\overline{S}))^2$

$$=6\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{150}{1296}$$

ب) $P(X=3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)-P(X=4)=\frac{20}{1296}$

جـ) قانون احتمال X هو:

X	0	1	2	3	4
P_i	$\left(\frac{5}{6}\right)^4$	$4\times\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$6\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$4\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{6}\right)^4$

هذا القانون يسمى بثنائي الحد وسيطيه $n=4$ و $p=\frac{1}{6}$

2 . 1 تجربة برنولي

تعريف

- اختبار برنولي هو حينما لا نهتم إلا بتحقيق حادث وحيد S في تجربة عشوائية .
- تجربة أو مخطط برنولي هو حينما نكرر اختبار برنولي n مرة ومستقلة عن بعضها البعض وفي نفس الشروط.

2 . 2 قانون برنولي

لتكن E تجربة عشوائية لها مخرجين S و $\overline{S}$ احتمالهما على الترتيب p و q حيث $q=1-p$

تعريف

- المتغير العشوائي الذي يأخذ القيمة 1 عند النجاح و القيمة 0 عند الرسوب يسمى متغير برنولي
- قانون احتمال هذا المتغير العشوائي يسمى قانون برنولي.

$P(X=0)=1-p$ و $P(X=1)=p$

X	0	1
P_i	$1-p$	p

خاصية

1) $E(X)=p$ ، 2) $V(X)=P(1-p)$ ، 3) $\sigma(X)=\sqrt{P(1-p)}$

مثال - ♦

E تجربة عشوائية تتمثل في رمي قطعة نقدية.
نسمي المخرج " ظهور الوجه " بـ S والمخرج " ظهور الظهر " بـ $\overline{S}$.
وليكن X المتغير العشوائي الذي قيمته 1 عند ظهور الوجه و 0 عند ظهور الظهر.

عندئذ قانون احتماله هو :

$E(X)=\frac{1}{2}$ ، $V(X)=\frac{1}{4}$ ، $\sigma(X)=\frac{1}{2}$

X	0	1
P_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

2 . 3 قانون ثنائي الحد

تعريف

نكرر n مرة و بصفة مستقلة نفس التجربة التي لها مخرجان S و $\overline{S}$ احتماليهما على الترتيب : p و $q=1-p$

المتغير العشوائي X الذي قيمه عدد مرات النجاح خلال الـ n تجربة. اي من 0 إلى n .

قانون احتمال X يسمى ثنائي الحد ذا الوسيطين n و p ونرمز له بـ $\mathcal{B}(n,p)$.

مبرهنة

من أجل كل عدد طبيعي k حيث $(0\le k\le n)$

لدينا $P(X=k)=C_n^k\,p^k\times(1-p)^{n-k}$

الاثبات

الحادث $(X=k)$ محقق إذا تحصلنا على k نجاح (S) و $n-k$ رسوب $(\overline{S})$.

بسبب استقلالية هذه التجارب فإن احتمال التحصل على k نجاح هو p^k ، واحتمال الحصول على $(n-k)$ رسوب هو q^{n-k} . وهذا مهما كان ترتيب ظهور S .

لأن احتمال الحصول على k نجاح (S) و $(n-k)$ رسوب $(\overline{S})$ في ترتيب معين معطى بالجداء: p^kq^{n-k} ، (p^kq^{n-k} هو احتمال مسلك يشمل k مرة S و $n-k$ مرة $\overline{S}$).

عدد الطرق للتحصل على k نجاح خلال n تجربة، يساوي عدد التوفيقات ذات k عنصر مختارة من بين n عنصر. وهذا العدد هو C_n^k (C_n^k عدد المسالك المحققة للحادث $(X=k)$).

وعليه $P(X=k)=C_n^k\,p^k\,q^{n-k}$

خواص

$E(X)=n\,p$ ، $V(X)=n\,p(1-p)$ ، $\sigma(X)=\sqrt{n\,p(1-p)}$

الإثبات

$$E(X)=0\,P(X=0)+1\,P(X=1)+.....+k\,P(X=k)+.....+n\times P(X=n)$$

$$=0+C_n^1\,p\,q^{n-1}+....+k\,C_n^k\,p^k\,q^{n-k}+....+n\,C_n^n\,p^n\,q^0$$

لكن $(p\,x+q)^n=q^n+C_n^1\,p\,q^{n-1}\,x+....+C_n^k\,p^k\,q^{n-k}\,x^k+....+C_n^n\,x^n\,p^n\,q^0$

بالاشتقاق بالنسبة إلى x نجد:

$$n\,P(p\,x+q)^{n-1}=C_n^1\,p\,q^{n-1}+....+k\,C_n^k\,p^k\,q^{n-k}\,x^{k-1}+....+n\,C_n^n\,p^n\,x^{n-1}$$

بوضع $x=1$ نجد:

$$n\,P(p+q)^{n-1}=C_n^1\,p\,q^{n-1}+....+k\,C_n^k\,p^k\,q^{n-k}+....+n\,C_n^n\,q^n=E(X)$$

وبما أن $p+q=1$ فإن $E(X)=n\,P$

ملاحظة

1) إذا علمنا قيمة $P(X=k)$ فإننا نستطيع حساب قيمة $P(X=k+1)$ مع $0 \leq k+1 \leq n$

$$P(X=k+1)=\frac{p}{q}\times\frac{n-k}{k+1}\times P(X=k)$$

2) شروط تطبيق قانون ثنائي الحد هي :

- كل تجربة مأخوذة بشكل معزول ولا تفرز إلا مخرجين S و $\overline{S}$ (نجاح ورسوب).
- النجاح دائما له نفس الاحتمال p في كل تجربة.
- هناك استقلالية وتماثل بين التجارب المتتالية.

3) بنشر $(p+q)^n$ نجد احتمال الحادث $(X=k)$ حيث $n \geq k \geq 0$ ولهذا سمي بقانون ثنائي الحد.

تمرين تدريبي 1

كيس يحتوي على 10 كرات واحدة منها بيضاء و ثلاث خضراء و 4 حمراء و 2 صفراء. نقوم بثلاث سحبات عشوائية متتالية بالإرجاع ونهتم بالحادث S "سحب كرة بيضاء"

1) احسب احتمال الحادث A " التحصل على كرتين بيضاوين في الثلاث سحبات".

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه عدد النجاحات خلال الثلاث سحبات.

- اعط قانون X .

الحل

بما أن كل تجربة على شكل معزول (سحب كرة من كيس يحتوي على 10 كرات) تفرز مخرجين هما " كرة بيضاء " أو " كرة غير بيضاء " (نهتم بظهور كرة بيضاء فقط).
هناك استقلالية بين التجارب الثلاث. واحتمال النجاح S هو دائما p في كل السحبات
إذن نستطيع تطبيق قانون ثنائي الحد.

1) قانون ثنائي الحد وسيطيه : $n=3$ و $p=\frac{1}{10}$

هناك ثلاثة مسالك تحقق الحادث A هي $SS\overline{S}$ ، $S\overline{S}S$ ، $\overline{S}SS$ ولها نفس الاحتمال $p^2 q$
وحسب قاعدة احتمال حادث نجد :

$$P(A)=3p^2q=3\left(\frac{1}{10}\right)^2\frac{9}{10}=\frac{27}{1000}$$

2) قيم X هي $3 , 2 , 1 , 0$

$$P(X=0)=C_3^0\,p^0q^3=q^3=\left(\frac{9}{10}\right)^3$$

$$P(X=1)=C_3^1\,p^1q^2=3\times\frac{1}{10}\times\left(\frac{9}{10}\right)^2=3\times\frac{9^2}{10^3}$$

$$P(X=2)=C_3^2\,p^2q^1=3\times\left(\frac{1}{10}\right)^2\times\frac{9}{10}=\frac{27}{10^3}$$

$P(X=3)=C_3^3\,p^3q^0=\frac{1}{10^3}$ إذن قانون X هو:

X	0	1	2	3
P_i	$\left(\frac{9}{10}\right)^3$	$3\times\frac{9^2}{10^3}$	$\frac{27}{10^3}$	$\frac{1}{10^3}$

تمرين تدريبي 2

نرمي في آن واحد ثلاث قطع نقدية متزنة .
ما هو احتمال التحصل على ثلاث مرات الوجه (F) ؟

الحل :

يمكن اعتبار رمي ثلاث قطع نقدية مرة واحدة كثلاث رميات متتالية. ونهتم بظهور الوجه F ظهور الوجه (F) على أي قطعة نقدية مستقل عن ظهوره في أي قطعة أخرى.
واحتمال ظهور الوجه F في كل منها يساوي $p=\frac{1}{2}$

إذن نستطيع تطبيق قانون ثنائي الحد الذي وسيطيه $n=3$ و $p=\frac{1}{2}$.

نسمي S " ظهور الوجه F"
نسمي A الحادث " ظهور ثلاث مرات الوجه F".

إذن $A=FFF$ وعليه $P(A)=C_3^3\,p^3q^0=C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^0=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

4 . 2 قانون التوزيع المنتظم

تعريف

نسمي قانون التوزيع المنتظم (أو تساوي الاحتمال) كل قانون لمتغير عشوائي X الذي يمكن أن يأخذ n قيمة $x_1 , x_2 , ... , x_n$ بحيث احتمال كل منها متساوي .

أي $P(X=x_0)=P(X=x_1)=....=P(X=x_n)=\frac{1}{n}$

خواص

$$E(X)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\times\frac{1}{n} \quad ، \quad V(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-E^2(X)$$

تمرين تدريبي 1

X متغير عشوائي قيمه $0 ، 0.1 ، 0.2 ، ..... ، 0.9$
بفرض تساوي الاحتمال لهذه القيم احسب $E(X)$ و $V(X)$

✓ **الحل :**

بما أنه لدينا تساوي احتمال فإن $P(X=k)=\frac{1}{10}$ مع $k\in\{0 ، 0,1 ، 0,2 ، \dots ، 0,9\}$

$$E(X)=\sum_{i=0}^{9} x_i\, p_i=\sum_{i=0}^{9}\frac{1}{10}\times\frac{i}{10}=\frac{1}{100}\sum_{i=0}^{9} i=0,45$$

$$V(X)=\sum_{i=0}^{9} x_i^2\, p_i-E^2(X)=\sum_{i=0}^{9}\frac{i^2}{100}\times\frac{1}{10}-(0,45)^2$$

$$=\frac{1}{1000}\sum_{i=0}^{9} i^2-(0,45)^2=\frac{1}{1000}\left(1^2+2^2+\dots+9^2\right)-(0,45)^2=\frac{285}{1000}-(0,45)^2=0,0825$$

تمرين تدريبي 2

دراسة احصائية بينت أنه في مجتمع تواتر ولادة بنت هو 0,55 .
نفرض أن جنس المولود عند الولادة غير متعلق بجنس المولود السابق.
نهتم بعدد البنات عند العائلات ذات الأربعة أطفال.

1-أ) ادرس قانون احتمال للمتغير العشوائي X الذي قيمه عدد البنات في هذه العائلات، مشكلا جدولا لهذا القانون وتمثيلا بيانيا.

ب) ما هي قيمة X الأكبر احتمالا في هذه العائلات ؟

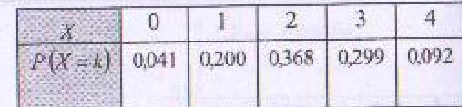
2- احسب $E(X)$ ، $V(X)$ ، $\sigma(X)$.

✓ **الحل :**

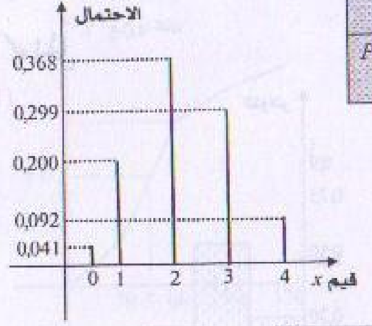
1) التجربة هي ولادة مولود والحدث الذي نهتم به هو "ولادة بنت" الذي نسميه S .
هذه التجربة لها مخرجين S و $\overline{S}$ واحتمالهما 0,55 و 0,45 على التوالي.
للحصول على أربع ولادات نكرر التجربة 4 مرات متوالية وهذه التجارب مستقلة عن بعضها البعض ومتماثلة.
إذن قانون المتغير العشوائي X هو قانون ثنائي الحد وسيطيه $n=4$ و $p=0,55$
قيم X هي 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4

$P(X=k)=C_n^k\, p^k q^{n-k}=C_4^k(0,55)^k(0,45)^{4-k}$ مع $4\geq k\geq 0$

$$P(X=0)=C_4^0(0,55)^0(0,45)^4=(0,45)^4=0,041$$
$$P(X=1)=C_4^1(0,55)(0,45)^3=0,200$$
$$P(X=2)=C_4^2(0,55)^2(0,45)^2=0,368$$
$$P(X=3)=C_4^3(0,55)^3(0,45)=0,299$$
$$P(X=4)=C_4^4(0,55)^4=0,092$$



X	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	0,041	0,200	0,368	0,299	0,092



القيمة الأكبر احتمالا هي $X=2$

2) $E(X)=\sum_{i=0}^{4} x_i\, p_i=n\,p=4\times0,55=2,2$

$V(X)=P(1-p)\times n=4\times0,55\times0,45=0,99$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0,99}=0,995$

3 . قوانين الاحتمالات المستمرة

في كل الحالات السابقة، المتغير العشوائي X قيمه منتهية $x_1 , x_2 , \dots , x_m$. نقول عندئذ أن X متغير متقطع، لكن توجد متغيرات عشوائية غير متقطعة (مستمرة) والتي تأخذ كل القيم الموجودة في مجال محدود أو غير محدود من $\mathbb{R}$.

من غير الممكن عندئذ تعريف المتغير العشوائي بتقديم احتمالات الأحداث $(X=x_i)$ لأن أعداد هذه الأحداث غير منتهية وعليه فمن الضروري تقديم طرح آخر يأخذ بعين الاعتبار الأسئلة التي نطرحها لأنه بواسطة متغير عشوائي غير متقطع نهتم بأحداث مثل :
" X يأخذ قيم من المجال I " الذي نرمز له بـ $(X\in I)$ مجازا .

مثال .

قمنا بدراسة حول أوزان أفراد مجتمع فكانت النتائج ملخصة في الجدول التالي:

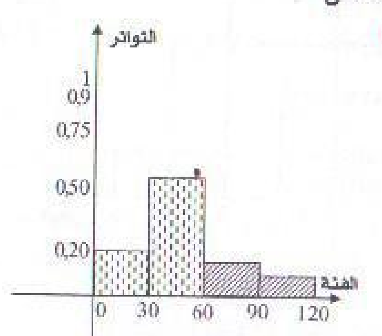
الفئات	[0,30[	[30,60[	[60,90[	[90,120[
التواتر	0,20	0,55	0,15	0,10
القيم العظمى	30	60	90	120
التواتر المجمع الصاعد	0,20	0,75	0,90	1

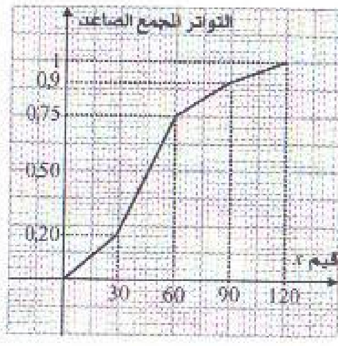
1-أ) مثل المدرج التكراري للتواترات
ب) مثل مضلع التواترات المجمعة الصاعدة
2) نختار عشوائيا شخص من هذا المجتمع وليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه قيم هذا النمط
أ) ماهي قيم X ؟
ب) احسب $P(X\langle 60)$
جـ) احسب $P(45\leq X\leq 75)$
د) احسب $P(X\rangle 80)$

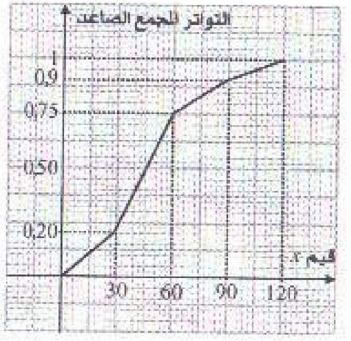


الحل

1)







2) أ) قيم X تنتمي إلى المجال $]0,120[$

ب) حساب $P(X<60)$:

$P(X<x)$ هي مساحة الجزء من المدرج التكراري الموجود قبل قيمة x إذا كانت المساحة الكلية هي الوحدة أو هي قيمة التواتر المجمع الصاعد الموافق لـ x .

هذه التواترات تترجم بلغة الاحتمالات، فمثلا $75\,\%$ من الأفراد أوزانهم أقل تماما من $60\,Kg$.

وعليه $P(X<60)=0,75$.

إذن قيمة $P(X<60)$ هي القيمة الموافقة لـ 60 على مضلع التواترات المجمعة الصاعدة وتمثل كذلك مساحة المستطيلات الموجودة على يسار المستقيم ذو المعادلة $x=60$.

جـ) الحادث $45 \le X \le 75$ يعني أن الأفراد أوزانهم أكبر من أو يساوي 45 وأقل من أو يساوي 75 . المساحة الكلية للمدرجات هي 30 .

المساحة المحصورة بين $x=45$ و $x=75$ هي 10,5

$P(45 \le X \le 75)$ هي نسبة 10,5 على 30 .

أي $P(45 \le X \le 75)=\frac{10,5}{30}=0,35$

د) الحادث $(X>80)$ يعني أن أفراد المجتمع الذين أوزانهم أكبر تماما من 80 .

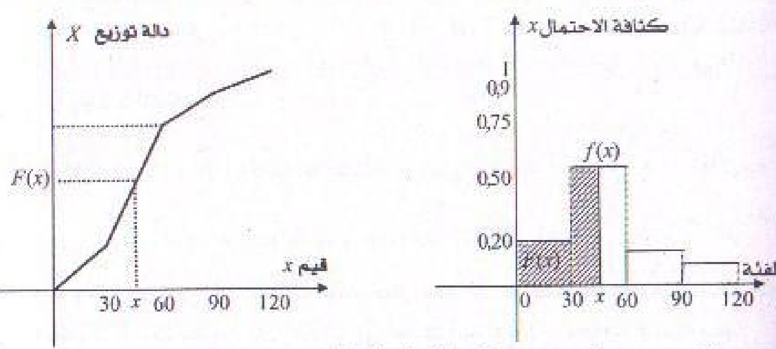
المساحة المحصورة بين 80 و 120 هي 4,5

ومنه $P(X>80)=\frac{4,5}{30}=0,15$

إذا اقتصرنا على الأضلاع العلوية للمستطيلات المشكلة للمدرج التكراري نتحصل على تمثيل لدالة درجية f معرفة على مجالات من الشكل $[\alpha,\beta[$ ، والاحتمال $P(X<x)$ يساوي تكامل الدالة f على المجال $[0,x]$.

و إذا رمزنا بـ F للدالة التي تمثيلها البياني هو مضلع التواترات المجمعة الصاعدة، فإن اقتصار الدالة F على $]60,90[$ يحقق $F(x)=P(X<x)$ و $F'(x)=f(x)$

الدالة F تسمى دالة التوزيع X و f تسمى كثافة احتمال X .



3 . 1 متغير معرف بواسطة دالة الكثافة

تعريف

نقول عن متغير عشوائي X أنه مستمر (مستمر تماما) إذا وجدت دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ ومستمرة على $\mathbb{R}$ ماعدا في بعض القيم وموجبة وبحيث مهما يكن المجال I من $\mathbb{R}$:

$P(X\in I)$ يساوي تكامل f على I ونكتب $P(X\in I)=\int_I f(x)\,dx$

الدالة f تسمى كثافة احتمال المتغير العشوائي X .

نتائج

1) إذا كان $I=[a,b]$ فإن $P(X\in I)=\int_a^b f(x)\,dx$

2) لما $a=b$ فإن $I=\{a\}$ ومنه $P(X=a)=0$

ونقول عندئذ أن احتمال أن يأخذ X قيمة معزولة وثابتة هو الصفر.

3) $P(X<a)=P(X\le a)$ لأن الحادث " $X\le a$ " هو الحادث " X يأخذ قيمة أصغر تماما أوتساوي a " الذي هو اتحاد الحادثين " $X<a$ " و " $X=a$ "

وعليه $P(X\le a)=P(X<a)+P(X=a)=P(X<a)$

4) بما أن " $X\in\mathbb{R}$ " هو حادث أكيد فإن $P(X\in\mathbb{R})=1$

إذن $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx=1$

5) إذا كان $I\cap J=\phi$ فإن $P(X\in I\cup J)=P(X\in I)+P(X\in J)=\int_I f(x)\,dx+\int_J f(x)\,dx$

ملاحظة

ـ إذا كان I مجال من الشكل $[a,+\infty[$ ، فإن العدد $\int_I f(x)\,dx$ يمثل النهاية عند $(+\infty)$ إن وجدت للدالة $t\mapsto \int_a^t f(x)\,dx$

- إذا كان I مجال من الشكل $]-\infty, a]$ ، فإن العدد $\int_I f(x)dx$ يمثل النهاية عند $(-\infty)$ إن وجدت للدالة $t \mapsto \int_t^a f(x)dx$

- القول أن $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ لدالة الكثافة f يعني أن الدالة $t \mapsto \int_0^t f(x)dx$ لها نهاية ℓ عند $(+\infty)$ والدالة $t \mapsto \int_t^0 f(x)dx$ لها نهاية ℓ' عند $(-\infty)$ و $\ell' + \ell = 1$

هذه الشروط على f تبين أنه ليست كل دالة f هي دالة كثافة. ونستخلص أنه إذا كانت f دالة كثافة فإن $\int_I f(x)dx$ معرف مهما كان I محدودا أو غير محدود.

مثال -

في كل حالة من الحالتين التاليتين، هل الدالة f المعطاة هي دالة كثافة لمتغير عشوائي أم لا ؟

أ) $\begin{cases} f(x) = \frac{3}{x^2} & , x \in [1, +\infty[\\ f(x) = 0 & , x \in]-\infty, 1] \end{cases}$

ب) $\begin{cases} f(x) = \frac{3}{x^4} & , x \in [1, +\infty[\\ f(x) = 0 & , x \in]-\infty, 1] \end{cases}$

الحل

أ) لنحسب $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$

لدينا $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_I f(x)dx + \int_J f(x)dx$ حيث $I = [1, +\infty[$ و $J =]-\infty, 1]$.

- التكامل $\int_I f(x)dx$ يمثل النهاية للدالة $t \mapsto \int_1^t f(x)dx$ عند $(+\infty)$

$$\int_1^t f(x)dx = \int_1^t \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = -\frac{1}{t} + 1$$

$$\lim_{t \to +\infty}\left(\int_1^t f(x)dx\right) = \lim_{t \to +\infty}\left(-\frac{1}{t} + 1\right) = 1$$

إذن $\int_I f(x)dx = 1 = \ell$

- التكامل $\int_J f(x)dx$ يمثل النهاية للدالة $t \mapsto \int_t^1 f(x)dx$ عند $(-\infty)$

لدينا $\int_t^1 f(x)dx = \int_t^1 0\,dx = 0$ إذن $\int_J f(x)dx = 0 = \ell'$

وبما أن $\ell' + \ell = 1$ فإن الدالة f هي دالة كثافة لمتغير عشوائي.

ب) الدالة f معرفة و مستمرة و موجبة على $\mathbb{R}$ لنحسب $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$

لدينا $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_I f(x)dx + \int_J f(x)dx$ حيث $I = [1, +\infty[$ و $J =]-\infty, 1]$

- التكامل $\int_I f(x)dx$ يمثل النهاية للدالة $t \mapsto \int_1^t f(x)dx$ عند $(+\infty)$

لدينا $\int_1^t f(x)dx = \int_1^t \frac{3}{x^4}dx = \left[-\frac{1}{x^3}\right]_1^t = \left[-\frac{1}{t^3} + 1\right]$

$$\lim_{t \to +\infty}\int_1^t f(x)dx = \lim_{t \to +\infty}\left(-\frac{1}{t^3} + 1\right) = 1 = \ell$$

- التكامل $\int_J f(x)dx$ يمثل النهاية للدالة $t \mapsto \int_t^1 f(x)dx$ عند $(-\infty)$

لدينا $\int_t^1 f(x)dx = \int_t^1 0\,dx = 0 = \ell'$

بما أن $\ell' + \ell = 1$ فإن الدالة f هي دالة كثافة لمتغير عشوائي.

3 . 2 قانون التوزيع المنتظم

تعريف ❶

X متغير عشوائي يأخذ أي قيمة من $[0,1]$.

- نقول عن المتغير العشوائي المستمر X أنه موزع بانتظام على المجال $[0,1]$ إذا كانت دالة كثافته f معرفة بـ $f(x) = 1$ لما $x \in]0,1[$

و $f(x) = 0$ لما x ينتمي إلى $\mathbb{R} -]0,1[$

ولدينا من أجل كل عددين حقيقيين a و b

بحيث $0 \le a < b \le 1$:

$$P(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b 1\,dx = b - a$$

نتيجة

- إذا أخذ X قيمة من مجال I جزئي من $[0,1]$ فإن احتماله يساوي طول المجال I .
- إذا كان I و J مجالان جزئيان من $[0,1]$ لهما نفس الطول فإن: $P(X \in I) = P(X \in J)$

تعريف ❷ (تعميم):

نقول عن متغير عشوائي مستمر أنه منتظم على المجال $[\alpha, \beta]$ إذا كانت دالة كثافته f معرفة بـ $f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}$ إذا كان $x \in]\alpha, \beta[$

و $f(x)=0$ إذا كان $x\in \mathbb{R} -]\alpha,\beta[$

و عليه إذا كان $[a,b]\subset[\alpha,\beta]$ فإن :

$$P(X\in[a,b]) = \frac{b-a}{\beta-\alpha} = \frac{\text{طول المجال } [a,b]}{\text{طول المجال } [\alpha,\beta]}$$



تمرين تدريبي

في موقف للحافلات تمر حافلة في كل نصف ساعة وهذا ابتداء من الساعة السادسة صباحا.
يلتحق مسافر بهذا الموقف ما بين السادسة والسابعة صباحا، لنفرض أن زمن وصوله إلى هذا الموقف هو متغير عشوائي موزع بانتظام على المجال $[0,60]$.

1- ما هو احتمال أن ينتظر هذا المسافر أقل من 5 دقائق ليركب في الحافلة الموالية؟

2- ما هو احتمال أن ينتظر هذا المسافر أكثر من 20 دقيقة ليركب في الحافلة الموالية؟

✓ الحل :

ليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه هو الوقت الذي مضى ما بين الساعة السادسة صباحا وزمن وصول المسافر (وحدة الزمن هي الدقيقة).

حسب الفرض X موزع بانتظام على المجال $[0,60]$

1) الانتظار يكون أصغر من 5 دقائق إذا التحق المسافر ما بين السادسة و 25 دقيقة والسادسة والنصف أو ما بين السادسة و 55 دقيقة والسابعة.

الحادث " المسافر يصل ما بين 6:25 و 6:30 " هو الحادث $25\le X\le 30$ والذي احتماله هو

$$P(25\le X\le 30)=\frac{30-25}{60-0}=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$$

الحادث $(55\le X\le 60)$ له نفس احتمال الحادث $(25\le X\le 30)$:

إذن احتمال أن المسافر ينتظر أقل من خمسة دقائق هو $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

2) المسافر ينتظر 20 دقيقة أو أكثر إذا التحق بالموقف ما بين 6:00 و 6:10 أو ما بين 6:30 و 6:40

احتمال هذا الحادث يساوي $P(0<X<10)+P(30<X<40)=\frac{10}{60}\times 2=\frac{1}{3}$

3 . 3 القانون الأسي

تعريف

نقول عن متغير عشوائي مستمر انه أسي وسيطه العدد الحقيقي $\lambda>0$ إذا كانت دالة كثافته f معرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ لما $x\ge 0$ و $f(x)=0$ لما $x\le 0$

خواص

1) $P(x>a)=e^{-\lambda a}$

2) $f(x<a)=1-e^{-\lambda a}$

3) $P(a<x<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$

الإثبات

1) $\int_a^t f(x)\,dx=\int_a^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$

$$=\left[\frac{-\lambda}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_a^t=\left[-e^{-\lambda x}\right]_a^t=-e^{-\lambda t}+e^{-\lambda a}$$

$$P(X>a)=\lim_{t\to+\infty}\left(-e^{-\lambda t}+e^{-\lambda a}\right)=e^{-\lambda a}$$

2) $P(X<a)=\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx$

$$=\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a=-e^{-\lambda a}+1$$

3) $P(a\le X\le b)=P(X\le b)-P(X<a)$

$$=\int_0^b f(x)\,dx-\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^b \lambda e^{-\lambda x}\,dx-\int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$=\left[e^{-\lambda x}\right]_0^b-\left[e^{-\lambda x}\right]_0^a=-e^{-\lambda b}+e^{-\lambda a}$$

تمرين تدريبي

نفرض أن زمن مكالمة هاتفية مقاسة بالدقائق هو متغير عشوائي أسي وسيطه $\lambda=\frac{1}{20}$.
يصل شخص A إلى حجرة الهاتف وفي نفس اللحظة يمر قبله شخص آخر (دخل إلى الحجرة).

1) ما هو احتمال أن الشخص A ينتظر أكثر من 20 دقيقة ؟

2) ما هو احتمال أن الشخص A ينتظر ما بين 20 و 40 دقيقة ؟

✓ الحل :

ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل زمن المكالمة الهاتفية.

X هو متغير أسي وسيطه $\lambda=\frac{1}{20}$.

1) الحادث " الانتظار أكثر من 20 دقيقة " هو $(X>20)$ واحتماله هو :

$$P(X<20)=e^{-\frac{1}{20}\times 20}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

2) الحادث " الانتظار ما بين 20 و 40 دقيقة " هو $(20\le X\le 40)$ والذي احتماله هو :

$$P(20\le X\le 40)=e^{-\frac{20}{20}}-e^{-\frac{40}{20}}=e^{-1}-e^{-2}$$

4 . 3 مدة الحياة بدون شيخوخة (متغير عشوائي بدون ذاكرة)

خاصية المتغيرات العشوائية الأسية هي عدم وجود ذاكرة. مثلا المتغير العشوائي X الذي يعطي مدة حياة جهاز في وحدة زمنية مختارة.

الحادث " مدة الحياة لا تتجاوز y سنة " هو الحادث $(X\in[0,y])$ الذي نرمز له بـ $(X\le y)$، وحادثه العكسي هو الحادث " مدة الحياة على الأقل y " الذي نعبر عنه بـ $(X>y)$ الذي نرمز

له ب $(X \in]y, +\infty[)$.

لنهتم بالحادث " مدة الحياة هي على الأقل $S+h$ سنة علما ان الجهاز قد عاش S سنة "

هذا الحادث هو الحادث $(X > S+h)$ علما ان $(X > S)$ الذي نرمز له بـ $P(X > S+h \;/\; X > S)$

الذي يحقق المساواة التالية :

$$P(X > S+h \;/\; X > S) = P(X > h) \quad \text{.............. (I)}$$

هذه المساواة نترجمها ب :

إذا علمنا أن الجهاز اشتغل S سنة فإن احتمال انه يشتغل h سنة إضافية هو نفس احتمال أن يعيش h سنة ابتداء من بداية تشغيله.

ـ إثبات المساواة (I) :

$$P(X > S+h \;/\; X > S) = \frac{P((X > S+h) \cap (X > S))}{P(X > S)}$$

لكن $(X > S+h)$ هو الحادث $(X \in]S+h, +\infty[)$

و $(X > S)$ هو الحادث $(X \in]S, +\infty[)$

بما ان تقاطع المجالين $]S+h, +\infty[$ و $]S, +\infty[$ هو $]S+h, +\infty[$ فإن :

تقاطع الحادثين $(X > S+h)$ و $(X > S)$ هو الحادث $(X > S+h)$.

لكن $P(x > S) = e^{-\lambda S}$ و $P(x > S+h) = e^{-\lambda(S+h)}$

إذن $P(X > S+h \;/\; X > S) = \dfrac{P(X > S+h)}{P(X > S)} = \dfrac{e^{-\lambda(S+h)}}{e^{-\lambda S}} = e^{-\lambda h} = P(X > h)$

تعريف ❶

نقول عن متغير عشوائي X انه بدون ذاكرة إذا كان :

$P(X > S+h \;/\; X > S) = P(X > h)$ مهما يكن S و h

تعريف ❷

نسمي نصف حياة، المدة x بحيث $P(X < x) = \frac{1}{2}$

ملاحظة

بما ان $P(X < x) = 1 - e^{-\lambda x}$ فإنه من المساواة $1 - e^{-\lambda x} = \frac{1}{2}$ نجد $x = \frac{\ln 2}{\lambda}$

تمرين تدريبي

مدة الحياة (معبر عنها بالتسبة) لبعض انواع التلفاز هو متغير عشوائي X الذي يتبع قانون اسي وسيطه $\lambda = 0{,}01$

1) احسب احتمال ان تلفازا من نفس النوع يحدث له عطب قبل 5 سنوات.

2) احسب احتمال ان تلفازا من نفس النوع لا يحدث له عطب قبل سنة.

3) احسب احتمال ان تلفازا من نفس النوع يبقى يشتغل حتى 6 سنوات ، علما انه اشتغل 5 سنوات. ماذا تلاحظ ؟

✓ الحل :

1) نبحث عن احتمال أن مدة حياة تلفاز تكون اصغر من 5 سنوات :

$P(X < 5) = 1 - e^{-\lambda \times 5} = 1 - e^{-0{,}05} =$

2) نبحث عن احتمال ان مدة حياة تلفاز تكون أكبر من سنة :

$P(X > 1) = e^{-0{,}01} =$

3) احتمال ان تلفاز يبقى يشتغل حتى 6 سنوات ، علما انه اشتغل 5 سنوات هو :

$P(X \geq 6 \;/\; X \geq 5)$

$P(X \geq 6 \;/\; X \geq 5) = P(X \geq 1) = e^{-0{,}01} =$

نلاحظ ان هذه النتيجة هي نفس نتيجة السؤال 2) وهذا ما يثبت خاصية عدم الذاكرة عند القوانين الأسية.

4. التلاؤم مع قانون احتمال متقطع متساوي

الهدف من هذه الدراسة هو المقارنة بين النتائج الملاحظة انطلاقا من التجارب مع القيم النظرية المعطاة في قانون الاحتمال.

مثال. ♦

لاعب يريد التحقق إن كان حجر النرد الذي يلعب به متزن او غير متزن.

نعلم أن قانون احتمال في حالة حجر نرد متزن هو قانون توزيع منتظم حيث :

$P(1) = P(2) = ... = P(6) = \frac{1}{6}$ ؛

يقوم هذا اللاعب برمي حجر النرد 100 مرة ويدون في كل مرة النتيجة المحصل عليها (الرقم المحصل عليه) والجدول التالي يبين ذلك :

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	16	19	20	16	14	15
f_i	0,16	0,19	0,20	0,16	0,14	0,15

لمعرفة إن كان توزيع التواترات المتحصل عليها هو قريب من قانون التوزيع المنتظم نحسب الكمية d^2 التي تمثل مجموع مربعات الفروق بين كل تواتر متحصل عليه والاحتمال النظري المنتظر.

$$d^2 = \left(0{,}16 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(0{,}19 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(0{,}2 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(0{,}16 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(0{,}14 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(0{,}15 - \frac{1}{6}\right)^2$$

$d^2 \approx 0{,}002732$ لحد الآن لا يمكننا القول أن هذه الكمية كبيرة أم صغيرة.

قيم d^2 متأثرة بمقاس العينة اي تتغير من سلسلة رميات إلى اخرى. لذلك ندرس تذبذب العينات وهذا بإنشاء سلاسل ذات 100 رقم مأخوذة عشوائيا من $\{1, 2, ..., 6\}$.

النتائج المتحصل عليها للعدد d^2 انطلاقا من 1000 محاكاة ملخصة في الجدول التالي:

MIN	D_1	Q_1	Me	Q_3	D_9	MAX
0,00372	0,00136	0,00254	0,00386	0,0065	0,00798	0,017

قيمة العشري التاسع (D_9) لهذه السلسلة هو 0,00798 هذا يعني أن 90% من قيم d^2 المحصل عليها خلال 1000 محاكاة تنتمي إلى المجال $[0 ، 0,00798]$.
بما ان قيمة d^2 اصغر من D_9 نستطيع ان نقول أن هذا الحجر النردي متزن بعتبة مجازفة قدرها 10% . اي اننا نخطأ في 10% من الحالات.
فنقول عندئذانه لدينا عتبة الثقة 90% .

ملاحظة

لما يكون n كبيرا بالقدر الكافي فإن قيمة D_9 تصبح مستقرة ومستقلة عن السلاسل.

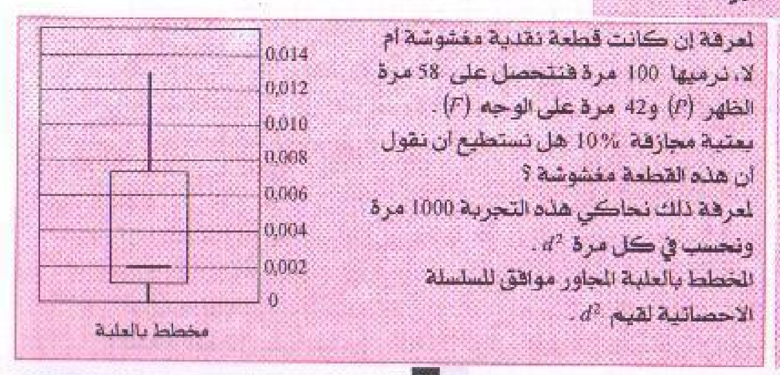
خاصية

لتكن تجربة مخارجها a_1 ، a_2 ، ... ، a_q .
تجريبيا إذا كررنا n مرة هذه التجربة $(n \geq 100)$ نتحصل على تواترات f_1 ، ... ، f_q للمخارج a_1 ، a_2 ، ... ، a_q على الترتيب.
لمقارنة هذه المعطيات بالنسبة إلى قانون متساوي الاحتمال على المجموعة $\{a_1,...,a_q\}$ نحسب العدد $d^2=\sum_{i=1}^{i=q}\left(f_i-\frac{1}{q}\right)^2$

تعليق

انجاز عدد كبير من المحاكاة لهذه التجربة يولد لنا سلسلة إحصائية حول d^2 عشريها التاسع هو D_9 .
- إذا كان $d^2 \leq D_9$ نقول عندئذ أن المعطيات متلائمة مع نموذج التوزيع المنتظم المفترض بعتبة مجازفة قدرها 10% .
- إذا كان $d^2 \rangle D_9$ نقول ان المعطيات غير متلائمة مع النموذج المفترض بعتبة مجازفة 10% .

تمرين تدريبي



مخطط بالعلبة

لمعرفة إن كانت قطعة نقدية مغشوشة أم لا، نرميها 100 مرة فنتحصل على 58 مرة الظهر (P) و42 مرة على الوجه (F) .
بعتبة مجازفة 10% هل نستطيع ان نقول أن هذه القطعة مغشوشة ؟
لمعرفة ذلك نحاكي هذه التجربة 1000 مرة ونحسب في كل مرة d^2 .
المخطط بالعلبة المجاور موافق للسلسلة الاحصائية لقيم d^2 .

✓ الحل :

تواتر ظهور الظهر (P) هو $\frac{58}{100}$ اي $0,58$
وتواتر ظهور الوجه (F) هو $0,42$.
وبما ان قانون التوزيع المنتظم على $\Omega=\{P , F\}$ هو $P(F)=P(p)=0,5$ فإن قيمة d^2 الموافقة لهذه التجربة هي $d^2=(0,58-0,5)^2+(0,42-0,5)^2=0,0128$.
العشري التاسع (D_9) لهذه السلسلة هو 0,013 و بما أن $d^2 \leq D_9$ فإنه يمكننا ان نعتبر ان هذه القطعة متزنة بعتبة مجازفة 10% .

تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 — تبسيط أعداد

1- بسط ما يلي :

أ) $\frac{18!}{16!}$ ، ب) $\frac{7!-6!}{4!}$ ، جـ) $\frac{6!}{3!\,3!}$ ، د) $\frac{1!}{4!}-\frac{30}{6!}$

هـ) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ ، و) $\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{n!}{(n+1)!}$ ، ن) $\frac{(2n+1)!}{(2n)!}$

2- باستعمال ترميز العاملي اعط كتابة أخرى للأعداد التالية :

$A=5\times6\times7\times8\times9\times10$ ، $B=\frac{9\times8\times7\times6\times5}{3\times2}$ ، $C=(n+2)(n+1)(n)(n-1)$

✓ الحل :

1) أ) $\frac{18!}{16!}=\frac{18\times17\times16!}{16!}=18\times17$

ب) $\frac{7!-6!}{4!}=\frac{7\times6!-6!}{4!}=\frac{6!(6)}{4!}=\frac{6\times5\times6\times4!}{4!}=180$

جـ) $\frac{6!}{3!\,3!}=\frac{6\times5\times4\times3!}{3!\,3!}=\frac{6\times5\times4}{3\times2}=20$

د) $\frac{1!}{4!}-\frac{30}{6!}=\frac{1}{4!}-\frac{30}{6\times5\times4!}=\frac{1}{4!}-\frac{1}{4!}=0$

هـ) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=\frac{(n+1)(n)\left[(n-1)!\right]}{(n-1)!}=(n+1)n$

و) $\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{(n-1)!}{n\times(n-1)!}-\frac{n!}{(n+1)\times n!}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$

ن) $\frac{(2n+1)!}{(2n)!}=\frac{(2n+1)!\times(2n)!}{(2n)!}=2n+1$

2) $A=\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10}{1\times2\times3\times4}=\frac{10!}{4!}$

$B=\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9}{(1\times2\times3)\times3\times2}=\frac{9!}{3!\,3!}$

$C=\frac{(n+2)!}{(n-2)!}$

تطبيق 2 — القوائم و الترتيبات

نريد وضع ثلاثة كراريس a,b,c في ثلاث محفظات T_1 ، T_2 ، T_3 .

1- كم طريقة يمكننا بها وضع هذه الكراريس إذا علمت أن كل كراس يوضع في محفظة ؟

2- كم طريقة نستطيع بها وضع هذه الكراريس مع العلم أن كل محفظة يمكن أن نضع فيها العدد الذي نريده ؟

✓ الحل :

1) بما أن كل محفظة نضع فيها كراس واحد فإن المحفظة الأولى لها 3 امكانيات، ومن أجل كل امكانية لحفظة T_1 توجد امكانيتين للمحفظة T_2 أي لدينا (3×2) امكانية لـ T_1 و T_2 معا ومن أجل كل امكانية لـ T_1 و T_2 لدينا امكانية واحدة لـ T_3
إذن لدينا $1\times(3\times2)$ امكانية لـ T_1 ، T_2 و T_3 .
إذن عدد الطرق المكنة لوضع هذه الكراريس في المحفظات T_1 ، T_2 و T_3 هو $3!=3\times2\times1=6$

2) بما أن كل محفظة يمكن أن يوضع فيها على الأكثر 3 كراريس فإن المحفظة T_1 لها 3 امكانيات، و T_2 لها 3 امكانيات ، و T_3 لها 3 امكانيات
وبالتالي عدد الطرق التي يمكن أن توضع بها هذه الكراريس في المحفظات هي $3\times3\times3=3^3=27$.

تطبيق 3 — القوائم و الترتيبات

في قاعة الانتظار في إحدى الإدارات بها 4 كراسي.

1- ما هو عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها 4 أشخاص على هذه الكراسي ؟

2- إذا كان في هذه القاعة 10 أشخاص وأردنا أن نفوض شخص ونائبه للتكلم مع المدير، فكم طريقة يمكننا بها أن نختار هذين الممثلين ؟

✓ الحل :

1) الشخص الأول له أربع امكانيات، ومن أجل كل امكانية للشخص الأول توجد 3 امكانيات للشخص الثاني، إذن توجد (4×3) امكانية للشخصين (1) و(2) .
ومن أجل كل امكانية للشخصين (1) و(2) توجد امكانيتين للشخص الثالث.
إذن توجد $2\times(4\times3)$ امكانية للأشخاص (1) و(2) و (3) .
ومن أجل كل امكانية للأشخاص (1) و(2) و (3) توجد امكانية واحدة للشخص الرابع.
إذن توجد $1\times(2\times3\times4)$ امكانية للأشخاص الأربعة.
وبالتالي توجد 24 طريقة يجلس بها هؤلاء الأشخاص على هذه الكراسي.

2) عدد الطرق التي يمكن بها اختيار ممثل ونائبه هي عدد ترتيبات عنصرين من مجموعة ذات 10 عناصر ويساوي $10\times9=90$.

تطبيق 4 — حساب مجموع الأعداد من الشكل $P\,C_n^p$

1- بين انه من اجل $n > 2$ و من اجل كل p لدينا $n\,C_{n-1}^{p-1} = p\,C_n^p$ حيث $1 \le p \le n$

2- احسب المجموع $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + n\,C_n^n$ بدلالة n.

✓ الحل :

1) $$n \times C_{n-1}^{p-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(n-p)!\,(p-1)!} = \frac{n! \times p}{(n-p)!\,(p-1)! \times p}$$
$$= p \times \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = p \times C_n^p$$

2) $$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + n\,C_n^n = \sum_{p=1}^{p=n} p\,C_n^p = \sum_{p=1}^{n} n\,C_{n-1}^{p-1}$$
$$= n \sum_{p=1}^{n} C_{n-1}^{p-1} = n \times 2^{n-1}$$

تطبيق 5 — حل معادلات و جمل معادلات

1- عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق الشرط المعطى.
أ) $4C_n^4 - 5C_n^{n-3} = 0$ ، ب) $C_n^4 - C_n^3 = n^3 - 3n^2 + 2n$

2- عين الثنائيات (x, y) من الأعداد الطبيعية بحيث:
$C_{x+1}^y = C_x^{y-1}$ و $C_{x+y}^2 = 10$

✓ الحل :

1) أ) $$C_n^4 = n \times \frac{n!}{(n-4)!\,4!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$
$$C_n^{n-3} = \frac{n!}{[n-(n-4)]!\,(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1}$$

الأعداد n إن وجدت تحقق $n \ge 4$

المساواة أ) تكتب على الشكل $\frac{4n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} - 5 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 0$

بالتبسيط نجد $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}(n-8) = 0$ اي $(n=0)$ او $(n=2)$ أو $(n=8)$

وبما ان $n \ge 4$ فإن قيمة n المطلوبة هي 8 .

ب) المساواة (ب) تكتب على الشكل :

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = n^3 - 3n^2 + 2n$$

بالتبسيط نجد $n(n-1)(n-2)(n-31) = 0$

ومنه ينتج $(n=0)$ أو $(n=1)$ او $(n=2)$ او $(n=31)$

وبما أن $n \ge 4$ فإن قيمة n المطلوبة هي 31 .

2) الحلول إن وجدت تحقق $x+1 \ge y$ و $x+y \ge 2$

- المساواة $C_{x+1}^y = C_x^{y-1}$ تكافئ $x+1 = y$ ... (1)

- المساواة $C_{x+y}^2 = 10$ تكافئ $(x+y)(x+y-1) = 20$ ... (2)

نعوض y في (2) نجد $2x^2 + x - 10 = 0$ وبعد حل هذه المعادلة نجد $x = 2$

وبالتالي $y = 2+1 = 3$

لان توجد ثنائية وحيدة هي $(2, 3)$ تحقق الشرطين .

تطبيق 6 — التوفيقات (تعيين عدد اللجان)

نريد تكوين لجنة مكونة من أربعة أشخاص من بين مجموعة مكونة من 14 رجل و 13 امرأة.

1- ما هو عدد الطرق التي يمكن أن نختار بها هذه اللجنة ؟

2- نريد أن تكون هذه اللجنة مكونة من رجلين وامرأتين، ما هو عدد الطرق التي يمكن بها أن نختار هذه اللجنة ؟

3- ما هو عدد الطرق التي يمكن بها أن نختار اللجنة إذا علمت أن اللجنة تشمل على الأكثر امرأتين ؟

✓ الحل :

1) عدد الطرق التي يمكن ان نختار بها هذه اللجنة هو عدد توفيقات 4 عناصر من مجموعة ذات 27 عنصر و هو C_{27}^4 (عدد المجموعات الجزئية التي تشمل 4 عناصر).

$$C_{27}^4 = \frac{27!}{23!\,4!} = \frac{27 \times 26 \times 25 \times 24}{4 \times 3 \times 2} = 17550$$

2) من اجل كل رجلين مختارين من الرجال يوجد C_{13}^2 لاختيار امرأتين من بين 13 امرأة. وبما ان عدد المجموعات المختارة التي تشمل رجلين من بين 14 رجل هي C_{14}^2 فإن عدد المجموعات التي تشمل رجلين وامرأتين هو $C_{13}^2 \times C_{14}^2$ اي $13 \times 7 \times 6 \times 13$ ويساوي 7098

3) اللجنة تشمل امرأتين على الأكثر ، هذا يعني إما امرأتين ورجلين أو امرأة وثلاثة رجال أو 4 رجال. وبالتالي يكون عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو :

$$C_{13}^2\,C_{14}^2 + C_{13}^1\,C_{14}^3 + C_{14}^4 = 7098 + 364 + 1001 = 8463$$

تطبيق 7 — توظيف دستور ثنائي الحد

n عدد طبيعي، ليكن العدد A_n حيث $A_n=\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$

1- تحقق أن A_3 و A_4 عددين طبيعيين.

2- برهن من أجل كل عدد طبيعي n أن A_n عدد طبيعي.

✓ الحل :

1)
$$A_3=\left(2+\sqrt{3}\right)^3+\left(2-\sqrt{3}\right)^3=\sum_{p=1}^{3} C_3^p\, 2^p \left(\sqrt{3}\right)^{3-p}+\sum_{p=1}^{p=3} C_3^p\, 2^p \left(-\sqrt{3}\right)^{3-p}$$
$$=\sum_{p=1}^{3}\left[C_3^p\, 2^p\left(\left(\sqrt{3}\right)^{3-p}+\left(-\sqrt{3}\right)^{3-p}\right)\right]$$
$$=C_3^0\, 2^0\left((\sqrt{3})^3+(-\sqrt{3})^3\right)+C_3^1\, 2^1\left((\sqrt{3})^2+(-\sqrt{3})^2\right)$$
$$+C_3^2\, 2^2\left((\sqrt{3})^1+(-\sqrt{3})^1\right)+C_3^3\, 2^3\left((\sqrt{3})^0+(-\sqrt{3})^0\right)$$
$$=3\sqrt{3}-3\sqrt{3}+6(3+3)+12\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)+8(1+1)$$
$$=36+16=52$$
$$A_4=\sum_{p=1}^{4} C_4^p\, 2^p \left(\sqrt{3}\right)^{4-p}+\sum_{p=1}^{4} C_4^p\, 2^p \left(-\sqrt{3}\right)^{4-p}$$
$$=C_4^0\, 2^0\left((\sqrt{3})^4+(-\sqrt{3})^4\right)+C_4^2\, 2^2(3+3)+C_4^4\, 2^4(1+1)$$
$$=18+24\times 6+16\times 2=194$$

2)
$$A_n=\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n=\sum_{p=0}^{n} C_n^p\, 2^{n-p} \left(\sqrt{3}\right)^p+\sum_{p=1}^{n} C_n^p\, 2^{n-p}\left(-\sqrt{3}\right)^p$$
$$=\sum_{p=0}^{n} C_n^p\, 2^{n-p}\left((\sqrt{3})^p+(-\sqrt{3})^p\right)$$

إذن $A_n=\sum_{p=0}^{n} C_n^p\, 2^{n-p}(\sqrt{3})^p\left(1+(-1)^p\right)$

نضع $\alpha_p=C_n^p\, 2^{n-p}(\sqrt{3})^p\left(1+(-1)^p\right)$

إذن $A_n=\sum_{p=0}^{n}\alpha_p=\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n=(\alpha_0+\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\ldots)+(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+\ldots)$

- إذا كان p زوجيا فإن $\left(\sqrt{3}\right)^p$ عدد طبيعي و بالتالي α_p عدد طبيعي وعليه المجموع $\alpha_0+\alpha_2+\alpha_4+\ldots$ عددا طبيعيا.
- إذا كان p فرديا فإن α_p يكون معدوما وعليه المجموع $\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+\ldots$ يكون معدوما.

إذن A_n هو عدد طبيعي.

تطبيق 8 — التوفيقات (تعيين عدد الاختيارات)

في أحد الامتحانات على الطالب أن يجيب على 8 أسئلة من بين 10 أسئلة مقترحة.

1- ما هو عدد الطرق التي يمكن للطالب أن يختار بها الأسئلة ؟

2- ما هو عدد الطرق التي يمكن للطالب أن يختار بها الأسئلة إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأولى إجبارية ؟

3- ما هو عدد الطرق التي يمكن للطالب أن يختار بها الأسئلة إذا كان من الضروري أن يجيب على أربع أسئلة من بين الخمسة الأولى ؟

✓ الحل :

1) عدد الطرق التي يمكن للطالب ان يختار بها الأسئلة هو $C_{10}^8=45$

2) عدد الطرق التي يمكن للطالب أن يختار بها الأسئلة إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأولى اجبارية هو $C_7^5=21$

3) عدد الطرق التي يمكن للطالب ان يختار بها الأسئلة إذا كان من الضروري أن يجيب على أربع أسئلة من بين الخمسة الأولى هو $C_5^4\times C_5^4=25$

تطبيق 9 — التوفيقات (تعيين عدد اللجان)

مجموعة مكونة من n شخص من بينهم الشخصين A و B . نريد تشكيل لجنة من p شخص من بين n شخص.

1- ما هو عدد اللجان المشكلة ؟

2- ما هو عدد اللجان في كل حالة من الحالات التالية:

أ) اللجان تشمل الشخصين A و B .

ب) اللجان لا تشمل الشخصين A و B .

ج) اللجان تشمل الشخص A ولا تشمل B .

د) اللجان تشمل B ولا تشمل A .

3- استنتج علاقة بين C_{n-2}^{p-2} ، C_{n-2}^{p} ، C_{n-2}^{p-1}

✓ الحل :

1) عدد اللجان المشكلة هو C_n^p

2) أ) إذا اختير A و B فإنه يبقى لنا اختيار $p-2$ شخص من بين $n-2$ وعدد اللجان المشكلة في هذه الحالة هو C_{n-2}^{p-2} .

ب) إذا كانت اللجان لا تشمل A و لا B فإننا نختار p شخص من بين $n-2$ شخص

وعدد هذه اللجان هو C_{n-2}^{p} .

حـ) إذا شملت A ولا تشمل B هذا يعني اننا نختار $p-1$ شخص من $n-2$ شخص وعدد هذه اللجان هو C_{n-2}^{p-1}

د) بنفس كيفية السؤال (حـ) نجد عدد اللجان التي تشمل الشخص B ولا تشمل الشخص A والذي يساوي C_{n-2}^{p-1}

3) اللجان التي تشمل p شخص من بين n شخص : إما تشمل الشخصين A و B وإما تشمل A ولا تشمل B ، أو تشمل B ولا تشمل A ، أو لا تشمل A ولا تشمل B

وبالتالي مجموع هذه اللجان يساوي C_{n}^{p}

أي $C_{n-2}^{p-2} + C_{n-2}^{p} + 2C_{n-2}^{p-1} = C_{n}^{p}$

تطبيق 10 حساب احتمال حوادث باستعمال التوفيقات

نختار عشوائيا 6 أرقام من بين الأعداد 1، 2، ....، 49 (ترتيب الأعداد المختارة غير مهم). نتيجة السحب مشكلة من 6 أرقام بالإضافة إلى رقم إضافي.

1- ما هو احتمال التحصل على 6 أرقام صحيحة ؟

2- ما هو احتمال التحصل على 5 أرقام صحيحة (من بين الستة) وكذا الرقم الإضافي ؟

3- ما هو احتمال التحصل على 5 أرقام صحيحة (بدون الرقم الإضافي) ؟

4- ما هو احتمال التحصل على 4 أرقام صحيحة بالضبط وكذا الرقم الإضافي ؟

✓ الحل :

1) A الحادث الحصول على 6 أرقام صحيحة ؛

$$P(A)=\frac{C_6^6}{C_{49}^6}=\frac{1}{1398386}=7{,}15\times10^{-8}$$

2) B الحادث الحصول على 5 أرقام صحيحة من بين 6 أرقام و كذا الرقم الإضافي ؛

$$P(B)=\frac{1}{49}\times\frac{C_6^5}{C_{49}^6}=\frac{1}{49}\times\frac{6}{1398386}=8{,}96\times10^{-8}$$

3) C هو الحادث الحصول على 5 أرقام صحيحة من بين 6 أرقام ؛

$$P(C)=\frac{C_6^5}{C_{49}^6}=\frac{6}{1398386}=4{,}30\times10^{-6}$$

4) D هو الحادث المطلوب حساب احتماله

$$P(D)=\frac{1}{49}\times\frac{C_6^4}{C_{49}^6}=\frac{1}{49}\times\frac{15}{1398386}=2{,}19\times10^{-7}$$

تطبيق 11 تعيين قانون احتمال متغير عشوائي

كيس يحتوي على أربع كرات حمراء وثلاث خضراء وواحدة بيضاء، نسحب عشوائيا ثلاث كرات من الكيس،

نسمي X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الألوان المتحصل عليها.

1- ما هي قيم X ؟

2- احسب الاحتمالات التالية $P(X=1)$ ، $P(X=3)$

3- استنتج قيمة $P(X=2)$

4- احسب الأمل الرياضي والانحراف المعيارة لـ X .

✓ الحل :

1) قيم X هي 1، 2، 3

2) الحادث $(X=1)$ هو التحصل على لون واحد.

عدد الحالات المكنة هو $C_8^3=56$

عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث $(X=1)$ هو $C_3^3+C_4^3=5$

إذن $P(X=1)=\frac{5}{56}=0{,}09$

$(X=3)$ هو الحادث ظهور ثلاثة الوان. وعدد الحالات الملائمة لتحقيقه هو $C_1^1\times C_3^1\times C_4^1$ ويساوي 12 . إذن $P(X=3)=\frac{12}{56}=0{,}21$

3) بما ان $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

فإن $P(X=2)=1-P((X=1)+P(X=3))=1-0{,}30=0{,}7$

4) $E(X)=\frac{5}{56}+\frac{24}{56}+\frac{117}{56}=2{,}61$

$V(X)=\frac{5}{56}+4\times\frac{12}{56}+9\times\frac{39}{56}-(2{,}61)^2=0{,}40$

$\sigma(X)=\sqrt{V(x)}=\sqrt{0{,}40}=0{,}63$

X	1	2	3
P_i	$\frac{5}{56}$	$\frac{12}{56}$	$\frac{39}{56}$

تطبيق 12 استعمال قانون ثنائي الحد في حساب الاحتمالات

كيس يحتوي على كرات بيضاء و كرات سوداء بحيث عدد الكرات السوداء يساوي 4 مرات عدد الكرات البيضاء.

1- نسحب عشوائيا كرة، ما هو احتمال أن تكون سوداء ؟

2- نسحب الآن ثلاث كرات متتالية بالإرجاع.

X هو المتغير العشوائي الذي قيمه عدد الكرات السوداء المسحوبة خلال الثلاث سحابات. اعط قانون احتمال X .

✓ الحل :

1) p احتمال الحادث S "سحب كرة سوداء"

q احتمال الحادث $\overline{S}$ "سحب كرة بيضاء"

إذن $\Omega \in \{S, \overline{S}\}$

بما ان S و $\overline{S}$ غير متلائمين فإن $P(S)+P(\overline{S})=1$

وبما ان عدد الكرات السوداء يساوي 4 مرات عدد الكرات البيضاء فإن $P(S)=4P(\overline{S})$

بالتعويض في المساواة $P(S)+P(\overline{S})=1$ نجد $5P(\overline{S})=1$ ومنه $P(\overline{S})=\frac{1}{5}$

وعليه $P(S)=\frac{4}{5}$

2) يمكن اعتبار سحب ثلاث كرات متتالية بالإرجاع كتجربة سحب كرة مكررة ثلاث مرات.
لاحظ أن مخارج كل تجربة مستقلة عن الأخرى وان احتمال كل مخرج هو دائما ثابت في التجارب الثلاث.

إذن نستطيع تطبيق قانون ثنائي الحد ذو الوسيطين $n=3$ و $p=\frac{4}{5}$

قيم X هي 0 ، 1 ، 2 ، 3

X	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\left(\frac{1}{5}\right)^3$	$\frac{12}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{64}{125}$

$$P(X=0)=C_3^0\, p^0 q^3=q^3=\left(\frac{1}{5}\right)^3$$

$$P(X=1)=C_3^1\, p^1 q^2=3\times\frac{4}{5}\times\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{12}{(5)^3}$$

$$P(X=2)=C_3^2\, p^2 q=3\times\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{48}{(5)^3}$$

$$P(X=3)=C_3^3\, p^3 q^0=p^3=\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{64}{5^3}$$

تطبيق 13 استعمال قانون ثنائي الحد في حساب الاحتمالات

احتمال ان آلة تتعطل يوما ما باستقلالية عن هذا اليوم هو 0,06 .
1- احسب احتمال ان الآلة لا تتعطل في خمسة ايام.
2- احسب احتمال ان الآلة لا تتعطل أكثر من يوم في هذه الأيام الخمسة.

✓ الحل :

التجربة تتمثل في تعطل الآلة ام لا في يوم ما ولها مخرجين S و $\overline{S}$.
S الحادث " الآلة لا تتعطل في يوم ما "
النجاح S دائما له نفس الاحتمال 0,94
من النص نستخلص استقلالية هذه التجارب وبذلك يمكننا تطبيق قانون ثنائي الحد.

1) A هو الحادث " الآلة لا تتعطل في خمسة ايام "
للحصول على الحادث A نكرر التجربة 5 مرات متتالية
وسيطا قانون ثنائي الحد هما $p=0{,}94$ و $n=5$
إذن $P(A)=C_5^5\, p^5 q^0=p^5=(0{,}94)^5=0{,}739$

2) نسمي B الحادث " الآلة لا تتعطل أكثر من يوم "
الحادث B هو الحادث العكسي للحادث A وبالتالي $P(B)=1-P(A)=0{,}266$.

تطبيق 14 استعمال قانون ثنائي الحد في حساب الاحتمالات

نرمي حجر نرد متزن 4 مرات متتالية، وليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه عدد مرات ظهور الوجه المرقم بـ 2 .
1- بين أن قانون X هو قانون ثنائي الحد يطلب تعيين وسيطيه n و p .
2- احسب $P(X=3)$ ، ثم $P(X<3)$
3- احسب $E(X)$ ، ثم $\sigma(X)$.

✓ الحل :

1) لدينا مخرجين هما التحصل على الرقم 2 (نجاح) وعدم التحصل على 2 (رسوب).
الرميات متماثلة ومستقلة عن بعضها البعض.
إذن قانون X هو قانون ثنائي الحد و سيطيه $n=4$ و $p=\frac{1}{6}$

2) $P(X=3)=C_4^3\, p^1 q^0=4\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\frac{5}{6}=20\times\left(\frac{1}{6}\right)^4$

الحادث " $X<3$ " يعني أن X يأخذ القيم 0 أو 1 أو 2
إذن $(X<3)=(X=0)\cap(X=1)\cap(X=2)$
وبما أن الحوادث $(X=0)$ و $(X=1)$ و $(X=2)$ غير متلائمة مثنى مثنى فإن :

$$P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=C_4^0\, p^0 q^4+C_4^1\, p^1 q^3+C_4^2\, p^2 q^2$$
$$=q^4+4pq^3+6p^2q^2=0{,}979$$

3) $E(X)=np=4\times\frac{1}{6}=0{,}66$

$\sigma(X)=\sqrt{npq}=\sqrt{4\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}=0{,}75$

تطبيق 15 استعمال قانون ثنائي الحد في حساب الاحتمالات

لدينا عينة من الأجهزة ربعها معطل. نسحب واحدا منها عشوائيا، ثم آخرا بعد الارجاع ، ما هو احتمال كل حادث من الحوادث التالية :

A " و لا جهاز معطل "

B " كلا الجهازين معطل "

C " جهاز واحد معطل "

D " على الأقل جهاز معطل "

✓ الحل :

نعتبر التجربة سحب جهاز من عينة. تكرار هذه التجربة مرتين يحقق التجربة المفروضة في النص.

التجربة سحب جهازا من عينة تفرز لنا مخرجين S و $\overline{S}$ حيث :

S الحادث " سحب جهاز غير معطل "

$\overline{S}$ الحادث " سحب جهاز معطل "

احتمال S هو $\frac{3}{4}=0{,}75$.

من المعطيات نستنتج أن التجربتين مستقلتين ومتماثلتين.

إذن نستطيع تطبيق قانون ثنائي الحد الذي وسيطيه $p=0{,}75$ و $n=2$.

X المتغير العشوائي الذي قيمه عدد مرات ظهور جهاز سليم

وبالتالي قيمه هي 0 ، 1 ، 2

$$P(A) = P(X=2) = C_2^2\, p^2\, q^0 = p^2 = (0{,}75)^2 = 0{,}5625$$

$$P(B) = P(X=0) = C_2^0\, p^0\, q^2 = p^2 = (0{,}25)^2 = 0{,}0625$$

$$P(C) = P(X=1) = C_2^1\, p^1\, q^1 = 2\, p\, p = 0{,}375$$

D هو الحادث العكسي للحادث A

ومنه $P(D)=P(\overline{A}) = 1-P(A) = 1-0{,}5625 = 0{,}4375$

تطبيق 16 استعمال قانون ثنائي الحد في حساب الاحتمالات

قطعة نقدية مغشوشة حيث أن احتمال الحصول على الظهر يساوي $\frac{1}{3}$.

1- نرمي هذه القطعة 4 مرات متتالية. احسب احتمال الحصول على الظهر على الأقل مرتين.

2- كم مرة يجب رمي القطعة حتى يكون احتمال التحصل على الظهر ثلاث مرات أكبر من 0,09.

✓ الحل :

1) التجربة (رمي قطعة نقدية) تفرز مخرجين هما التحصل على الظهر (S) والوجه $(\overline{S})$ ، الرميات الأربع متماثلة ومستقلة عن بعضها البعض.

X هو المتغير العشوائي الذي قيمه عدد مرات ظهور الظهر.

وبالتالي فإن قيمه هي 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4

قانون X هو قانون ثنائي الحد الذي وسيطيه $n=4$ و $p=\frac{1}{3}$

نسمي A الحادث " ظهور الظهر على الأقل مرتين " ونرمز له بـ $(X \geq 2)$.

$\overline{A}$ هو الحادث $(X < 2)$ الذي يساوي $(X=0)\cup(X=1)$

وبما أن $(X=0)$ و $(X=1)$ غير متلائمين فإن :

$$P(\overline{A}) = P(X=0) + P(X=1) = C_4^0\, p^0\, q^4 + C_4^1\, p\, q^3$$

$$= (\tfrac{2}{3})^4 + \frac{4}{3} \times (\tfrac{2}{3})^3 = \frac{16}{81} + \frac{32}{81} = \frac{48}{81}$$

إذن $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{48}{81}=\frac{33}{81}=\frac{11}{27}$

2) نكرر التجربة " رمي القطعة النقدية " n مرة ، وليكن X المتغير العشوائي المعرف في السؤال (1)

قانون X هو قانون ثنائي الحد وسيطيه n و $\frac{1}{3}$.

احتمال الحصول على الظهر ثلاث مرات في n مرة هو :

$$P(X=3) = C_n^3\, p^3\, q^{n-3} = \frac{n!}{(n-3)!\,3!} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \times (\tfrac{1}{3})^2 \times (\tfrac{2}{3})^{n-3}$$

$$= (\tfrac{1}{3})^4 \times \frac{1}{2} \times n(n-1)(n-2) \times (\tfrac{2}{3})^{n-3}$$

عدد المرات المطلوبة هو 4

تطبيق 17 استعمال قانون ثنائي الحد في حساب الاحتمالات

احتمال أن يبلغ رامي رمح هدفه هو 0,6.

في منافسة هذا المتسابق يملك أربع رميات (4 أسهم) ، Y يمثل عدد الأسهم التي تبلغ الهدف خلال أربع محاولات.

1- بين أن قانون Y هو قانون ثنائي الحد يطلب تعيين وسيطيه.

2- احسب $E(Y)$ و $\sigma(Y)$.

3- الرامي يربح 10 نقاط إذا بلغت على الأقل ثلاثة من السهام الهدف ويخسر 5 نقاط في الحالات الأخرى.

Z هو المتغير العشوائي الذي يمثل الربح (أو الخسارة) الممكنة للرامي.

- اعط قانون Z ، ثم احسب $E(Z)$ و $\sigma(Z)$.

✓ **الحل :**

1) كل الرميات مستقلة ومتماثلة وكل رمية لها مخرجان S و $\bar{S}$ حيث :

S " السهم يبلغ الهدف ".

إذن Y هو متغير عشوائي قانونه ثنائي الحد الذي وسيطيه $p=0,6$ و $n=4$

2) قيم Y هي $4 ، 3 ، 2 ، 1 ، 0$

Y	0	1	2	3	4
P_i	q^4	$4pq^3$	$6p^2q^2$	$4p^3q$	p^4

$P(Y=0) = C_4^0\, p^0 q^4 = q^4 = 0,0256$

$P(Y=1) = C_4^1\, p^1 q^3 = 0,1536$

$P(Y=2) = C_4^2\, p^2 q^2 = 0,3456$

$P(Y=3) = C_4^3\, p^3 q = 4 \times (0,6)^3 \times 0,4 = 0,3456$

$P(Y=4) = C_4^4\, p^4 q^0 = p^4 = (0,6)^4 = 0,1296$

$E(Y) = n\,p = 4 \times 0,6 = 2,4$

$\sigma(Y) = \sqrt{n\,p\,q} = \sqrt{4 \times 0,6 \times 0,4} = 0,979$

3) قيم Z هي 10 ، -5.

Z	10	-5
P_i	0,4752	0,5248

$P(Z=10) = P(Y=4) + P(Y=3) = 0,4752$

$P(Z=-5) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) = 0,5248$

$E(Z) = 10 \times 0,4752 - 5 \times 0,5248 = 2,28$

$V(Z) = 100 \times 0,4752 + 25 \times 0,5248 - (2,28)^2 = 47,52 + 13,2 - (2,28)^2 = 55,44$.

$\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{55,44} = 7,44$

تطبيق 18 تعيين قانون احتمال متغير عشوائي

حجر نرد له أربعة وجوه سوداء ووجهين بيضاوين. عندما نرمي هذا النرد فإن كل الوجوه لها نفس احتمال الظهور.
نرمي هذا الحجر 5 مرات متتالية.
1) ما هو احتمال أن الوجه الأبيض يظهر في الرمية الخامسة ؟
2) ما هو احتمال أن الوجه الأبيض يظهر على الأقل مرة ؟
3) X هو المتغير العشوائي الذي قيمه عدد الوجوه السوداء المحصل عليها.
- ما هو قانون X ؟

✓ **الحل :**

1) تجربة رمي حجر النرد لها مخرجين S و $\bar{S}$ حيث :

S " ظهور الوجه الأبيض " واحتماله $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\bar{S}$ " ظهور الوجه الأسود " واحتماله $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

الحادث " الوجه الأبيض يظهر في الرمية الخامسة " يعني الحادث " $\bar{S}\,\bar{S}\,\bar{S}\,\bar{S}\,S$ " واحتمال هذه القائمة هو :

$P(\bar{S}\,\bar{S}\,\bar{S}\,\bar{S}\,S) = (P(\bar{S}))^4 \times P(S) = (1-P(S))^4 \times P(S) = (\frac{2}{3})^4 \times \frac{1}{3} = \frac{16}{243} = 0,0660$

2) نسمي A " الحادث الوجه الأبيض يظهر على الأقل مرة "

الحادث العكسي للحادث A هو " الوجه الأبيض لا يظهر و لا مرة ". اي $\bar{S}\,\bar{S}\,\bar{S}\,\bar{S}\,\bar{S}$

إذن $P(\bar{A}) = P(\bar{S})^5 = (\frac{2}{3})^5 = 0,13$

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0,87$

3) قيم X هي $5 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1 ، 0$

بما أن الرميات الخمسة مستقلة ومتماثلة وكل منها لها مخرجين S و $\bar{S}$

X	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	q^5	$5pq^4$	$10p^2q^3$	$10p^3q^2$	$5p^4q$	p^5

فإن : قانون احتمال X هو قانون ثنائي الحد وسيطيه $p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ و $n=5$

$P(X=0) = C_5^0\, p^0 q^5 = q^5 = (\frac{1}{3})^5 = 0,004$

$P(X=1) = C_5^1\, p^1 q^4 = 5 \times \frac{2}{3} \times (\frac{1}{3})^4 = 0,041$

$P(X=2) = C_5^2\, p^2 q^3 = 10\,p^2 q^3 = 10(\frac{2}{3})^2 \times (\frac{1}{3})^3 = 0,165$

$P(X=3) = C_5^3\, p^3 q^2 = 10\,p^3 q^2 = 10(\frac{2}{3})^3 \times (\frac{1}{3})^2 = 0,329$

$P(X=4) = C_5^4\, p^4 q^1 = 5\,p^4 q = 5 \times (\frac{2}{3})^4 \times \frac{1}{3} = 0,329$

$P(X=5) = C_5^5\, p^5 = (\frac{2}{3})^5 = 0,132$

تطبيق 19 استعمال قانون ثنائي الحد في حساب الاحتمالات

فريق كرة السلة لثانوية ما يشارك في دورة أخوية، 8 تلاميذ اختيرو لهذه المناسبة من بينهم يونس.
I- لمقابلة ما اختار المدرب عشوائيا مجموعة من خمسة لاعبين من بين الثمانية المختارين.
نسمي هذه المجموعة " خماسي ".
أ) كم من مجموعة ذات خمسة لاعبين يمكن للمدرب تشكيلها ؟
ب) بين أن احتمال أن يكون يونس من بين الخمسة المختارين هو $\frac{5}{8}$.

-2 في هذه الدورة الرياضية، يلعب الفريق ثلاث مقابلات، في كل مباراة يقوم المدرب بتشكيل فريق خماسي بصفة عشوائية.

- احسب احتمال أن يونس يشارك :

أ) في ولا لقاء.

ب) في لقاء واحد فقط.

جـ) لقائين فقط.

د) ثلاثة لقاءات فقط.

الحل :

1) أ) عدد المجموعات التي تشمل خمسة لاعبين من بين ثمانية لاعبين هو : $C_8^5 = \frac{8\times7\times6}{6} = 56$

ب) A هو الحادث " يونس من بين الخمسة لاعبين المختارين "

عدد الحالات الملائمة لتحقيق A هو C_7^4 أي : $C_7^4 = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7\times6\times5}{6} = 7\times5 = 35$

إذن $P(A) = \frac{7\times5}{8\times7} = \frac{5}{8}$

2) المباريات مستقلة ومتماثلة وكل منها لها مخرجان هما " يونس يشارك في المباراة " الذي نرمز له بـ S و " يونس لا يشارك في المباراة " نرمز له بـ $\overline{S}$. واحتمال S هو $\frac{5}{8}$.

X هو المتغير العشوائي الذي قيمه تمثل عدد مشاركات يونس في المباريات الثلاث.

قانون X هو قانون ثنائي الحد وسيطيه $n=3$ ، $p=\frac{5}{8}$.

أ) نرمز إلى الحادث المطلوب بـ A :

$$P(A) = P(X=0) = C_3^0 p^0 q^3 = q^3 = (\frac{3}{8})^3 = 0,053$$

ب) نرمز إلى الحادث المطلوب بـ B :

$$P(B) = P(X=1) = C_3^1 p^1 q^2 = 3\times\frac{5}{8}\times(\frac{3}{8})^2 = 0,263$$

جـ) $$P(X=2) = C_3^2 p^2 q = 3p^2 q = 3\times(\frac{5}{8})^2\times\frac{3}{8} = 0,44$$

د) $$P(X=3) = C_3^3 p^3 q^0 = p^3 = (\frac{5}{8})^3 = 0,244$$

تطبيق 20 استعمال قانون ثنائي الحد في حساب الاحتمالات

في مسابقة قرآنية يعطى اسم سورة و 7 آيات من بينها ثلاث آيات فقط موجودة في هذه السورة. على المشارك اختيار ثلاث آيات مختلفة من بين السبعة، فوزه متعلق بإيجاده الثلاث آيات الموجودة في السورة.

-1 مشارك لا يعرف السورة ويجيب عشوائيا :

أ) ما هو احتمال فوزه ؟

ب) ما هو احتمال أن يجد على الأقل آيتين من السورة ؟

-2 المشارك يعرف آية من الثلاث آيات ويختار الأخرتين عشوائيا :

- ما هو احتمال أن يكون فائزا ؟

-3 خمسة مشاركين يختارون عشوائيا وبصفة مستقلة عن بعضهم البعض ثلاث آيات من بين السبع آيات المقترحة :

أ) ما هو احتمال أن يكون واحدا فقط فائزا ؟

ب) ما هو احتمال أن يكون على الأقل واحدا منهم فائزا ؟

الحل :

1) أ) عدد الحالات الممكنة لاختيار ثلاث آيات من بين 7 آيات هو $C_7^3 = 35$

A هو الحادث " المشارك يفوز بالمسابقة "

عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث A هو $C_3^3 = 1$

إذن $P(A) = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}$

ب) B هو الحادث " المشارك يجد على الأقل آيتين"

عدد الحالات الملائمة $C_3^2 C_4^1 + C_3^3$ أي 13

ومنه $P(B) = \frac{13}{35}$

2) نسمي هذا الحادث بـ C وعدد الحالات الممكنة له هو C_6^2 (بقيت 6 آيات ليختارمنها 2)

عدد الحالات الملائمة هو $C_2^2 = 1$

إذن $P(B) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$

3) E_1 تجربة معرفة كمايلي (المشارك يختار ثلاث آيات من بين 7)

نكرر هذه التجربة 5 مرات فنحصل على التجربة المعطاة في النص.

مخارج E_1 هي S و $\overline{S}$ حيث S هو الحادث " الآيات المختارة موجودة في السورة" واحتماله هو $p = \frac{1}{35}$

التجارب E_1 ، E_2 ، ... ، E_5 مستقلة ومتماثلة.

X المتغير العشوائي الذي قيمه عدد مرات الفوز وهي 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 .

قانون هذا المتغير العشوائي هو قانون ثنائي الحد الذي وسيطيه $n=5$ ، $p=\frac{1}{35}$.

أ) احتمال أن يكون واحدا فقط فائز هو $P(X=1)$

$$P(X=1) = C_5^1 p^1 q^4 = 5pq^4 = 5\times\frac{1}{35}\times(\frac{34}{35})^4 = 0,127$$

ب) D هو الحادث " على الأقل واحد منهم فائز "

$\overline{D}$ هو الحادث " و لا أحد فائز " واحتماله هو $P(\overline{D}) = P(X=0)$

إذن $$P(D) = 1-P(\overline{D}) = 1-P(X=0) = 1-C_5^0 p^0 q^5 = 1-q^5 = 1-(\frac{34}{35})^5 = 0,135$$

تطبيق 24 استعمال قانون ثنائي الحد في حساب الاحتمالات

A و B لاعبان يتقابلان في دورة لتنس الطاولة.
الاحصائيات حول المباريات السابقة اعطت احتمال ان اللاعب A يربح مقابلة هو 0,6 .
A و B يلعبان عددا فرديا من المباريات. الرابح هو الذي يفوز بأكبر عدد من المباريات.
ما هو احتمال الحادث " B يربح الدورة " في كل حالة من الحالتين التاليتين :
أ) الدورة تشمل على مقابلة واحدة.
ب) الدورة تشمل على ثلاث مقابلات.

✓ الحل :

أ) احتمال الحادث المفروض هو $1-0{,}6=0{,}4$
(الحادث المفروض هو الحادث العكسي للحادث " اللاعب A يربح مقابلة ").

ب) E_1 التجربة : " اللاعب يلعب مقابلة " هذه التجربة تفرز مخرجين هما S و $\overline{S}$ حيث :
S " اللاعب B يربح مقابلة " واحتماله هو 0,4 .
نكرر التجربة E_1 ثلاث مرات فنحصل على التجربة المفروضة في هذا السؤال.
التجارب E_1 ، E_2 ، E_3 مستقلة ومتماثلة.
X المتغير العشوائي الذي قيمه عدد مرات فوز اللاعب B وهي 0 ، 1 ، 2 ، 3 .
قانون X هو قانون ثنائي الحد الذي وسيطيه $n=3$ ، $p=0{,}4$.
L الحادث " اللاعب B يربح الدورة " وهو $(X=2)$ أو $(X=3)$
وهذين الحادثين غير متلائمين.

$$P(L)=P(X=2)+P(X=3)=C_3^2\,p^2\,q^1+C_3^3\,p^3\,q^0$$
$$=3\,p^2\,q+p^3=3\times(0{,}4)^2\times0{,}6+(0{,}4)^3=0{,}352$$

تطبيق 25 استعمال قانون ثنائي الحد في حساب الاحتمالات

مكتب مجهز بـ 20 كمبيوتر، احتمال ان واحدا منهم يتعطل خلال السنة هو 0,3 . لنفرض ان التعطلات التي تحدث للأجهزة مستقلة الواحدة عن الأخرى.
1- احسب احتمال ان 4 اجهزة كمبيوتر تتعطل خلال السنة.
2- احسب احتمال ان جهازين على الأكثر يتعطلان خلال السنة.

✓ الحل :

التجربة هي " تعطل كمبيوتر خلال السنة ". هذه التجربة تفرز مخرجين هما S و $\overline{S}$ حيث :
S " جهاز كمبيوتر يتعطل خلال السنة "

نكرر هذه التجربة 20 مرة لنحصل على التجربة المفروضة في النص.
لاحظ أن هذه التجارب مستقلة ومتماثلة فيما بينها.
X المتغير العشوائي الذي قيمه عدد الأجهزة المعطلة وهي 0 ، 1 ، ... ، 20 .
قانون X هو قانون ثنائي الحد الذي وسيطيه $n=20$ ، $p=0{,}3$.

1) احتمال الحادث المطلوب هو $P(X=4)$

$$P(X=4)=C_{20}^4\,p^4\,q^{16}=15\times19\times17\times(0{,}3)^4\times(0{,}7)^{16}=0{,}13$$

2) الحادث " على الأكثر جهازين يتعطلان خلال السنة " هو $(X\leq2)$

$$P(X\leq2)=P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)$$
$$=C_{20}^2\,p^2\,q^{18}+C_{20}^1\,p^1\,q^{19}+C_{20}^0\,p^0\,q^{20}$$
$$=10\times19\times18\,p^2\,q^{18}+20\,p\,q^{19}+q^{20}$$
$$=q^{18}\,(190\times18\,p^2+20\,p\,q+q^2)=0{,}51$$

تطبيق 26 حساب احتمال حوادث

1- من اجل قانون ثنائي الحد وسيطيه n و p بين أن :
$$P(X=k+1)=\frac{n-k}{k+1}\,\frac{p}{1-p}\times P(X=k)$$
2- من اجل قانون ثنائي الحد وسيطيه $n=4$ و $p=0{,}2$. احسب $P(X=0)$ ، ثم استنتج قيم $P(X=1)$ ، $P(X=2)$ و $P(X=3)$ ، $P(X=4)$
3- ما هي قيم X الأكثر احتمالا ؟

✓ الحل :

1) لدينا $P(X=k)=C_n^k\,p^k\,(1-p)^{n-k}$
إذن $P(X=k+1)=C_n^{k+1}\,p^{k+1}\,(1-p)^{n-(k+1)}$

$$=\frac{n!}{[\,n-(k+1)]!\,(k+1)\,]!}\,p^k\times p\,(1-p)^{n-k}\,(1-p)^{-1}$$
$$=\frac{n!\times(n-k)}{(n-k)\,(n-k-1)!\,(k+1)\times k!}\,p^k\times p\,(1-p)^{n-k}\,(1-p)^{-1}$$
$$=\left[\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\,p^k(1-p)^{n-k}\right]\frac{n-k}{k+1}\,\frac{p}{1-p}$$
$$=P(X=k)\times\frac{n-k}{k+1}\times\frac{p}{1-p}$$

2)
$$P(X=0)=C_4^0\,p^0\,(1-p)^4=(0{,}8)^4=0{,}41$$
$$P(X=1)=P(X=0)\times4\times\frac{0{,}2}{0{,}8}=0{,}41$$
$$P(X=2)=P(X=1)\times\frac{3}{2}\times\frac{0{,}2}{0{,}8}=0{,}15$$

$$P(X=3)=P(X=2)\times\frac{2}{3}\times\frac{0{,}2}{0{,}8}=0{,}02$$

$$P(X=4)=P(X=3)\times\frac{1}{4}\times\frac{0{,}2}{0{,}8}=0{,}01$$

3) قيم X الأكثر احتمالا هي 0 و 1 .

تطبيق 24 استعمال قانون ثنائي الحد في حساب الاحتمالات

1- كيس يحتوي على 36 كرة لا نفرق بينها عند اللمس، منها كرتان بيضاوتان واثنتان حمراوتان والأخرى خضراء. نفرض أن كل السحابات متساوية الاحتمال.

- نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الكيس.

احسب احتمال كل من الحوادث التالية :

A " نتحصل على كرات مختلفة اللون"

B " لا نتحصل على أي كرة خضراء"

C " لا نتحصل إلا على كرة خضراء"

2- تركيبة الكيس لا تتغير، نسحب ثلاث مرات متتالية بالارجاع كرة من الكيس، وليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه عدد الكرات الحمراء المتحصل عليها في الثلاث سحابات. اعط قانون X .

3- نفرض الآن أن الكيس يحتوي على 36 كرة بحيث توجد n كرة بيضاء و n كرة حمراء والأخرى خضراء. حيث $17 \geq n \geq 1$.

نسحب في آن واحد ثلاث كرات من الكيس.

نعتبر الحوادث A ، B ، C المذكورة أعلاه.

أ) احسب $P(A)$ بدلالة n ، ثم عين n بحيث $P(A)$ يكون أعظميا.

ب) احسب $P(B)$.

ابتداءا من أي قيمة لـ n يكون $P(B) \rangle 0{,}6$

جـ) احسب $P(C)$.

الحل :

1) عدد الحالات الممكنة للسحب هو $C_{36}^3=7140$

عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث A هو $C_2^1\,C_2^1\,C_{32}^1=128$

إذن $P(A)=\frac{C_2^1\,C_2^1\,C_{32}^1}{C_{36}^3}=\frac{128}{7140}=0{,}018$

- عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث B هو $C_4^3=4$

ومنه $P(B)=\frac{C_4^3}{C_{36}^3}=\frac{4}{7140}=0{,}00056$

عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث C هو $C_{32}^1\,C_4^2=192$

ومنه $P(C)=\frac{192}{7140}=0{,}027$

2) قيم X هي 0 ، 1 ، 2 ، 3 .

X	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{39304}{46656}$	$\frac{6936}{46656}$	$\frac{408}{46656}$	$\frac{8}{46656}$

E_1 هي التجربة سحب كرة من الكيس وهذه التجربة لها مخرجان S و $\overline{S}$ حيث :

S " التحصل على كرة حمراء " واحتماله هو $p=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

بتكرار التجربة E_1 ثلاث مرات نحصل على التجربة المعطاة في النص.

التجارب الثلاث مستقلة ومتماثلة واحتمال S هو نفسه في كل منها.

إذن قانون X هو قانون ثنائي الحد وسيطيه هما $n=3$ ، $p=\frac{1}{18}$.

$$P(X=0)=C_3^0\,p^0\,q^3=q^3=\frac{39304}{46656}$$

$$P(X=1)=C_3^1\,p^1\,q^2=3\times\frac{2}{36}\times\frac{1156}{(36)^2}=\frac{6936}{46656}$$

$$P(X=2)=C_3^2\,p^2\,q=3\times\frac{4}{(36)^2}\times\frac{34}{36}=\frac{408}{46656}$$

$$P(X=3)=C_3^3\,p^3=\frac{8}{46656}$$

3-أ) $P(A)=\frac{C_n^1\times C_n^1\times C_{36-2n}^1}{C_{36}^3}=\frac{n\times n\,(36-2n)}{7140}=\frac{n^2\,(36-2n)}{7140}$

نضع $f(x)=\frac{x^2\,(36-2x)}{7140}$.

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x)=\frac{6}{7140}\,(-x^2+12)$

x	$-\infty$	$-\sqrt{12}$		$\sqrt{12}$	$+\infty$
f'	-	0	+	0	-
f	↘		↗		↘

$P(A)=f(n)$

$P(A)$ يكون أعظميا إذا كان $f(n)$ أعظميا مع $17>n\geq 1$

من الجدول نستنتج أن $f(n)$ أعظميا من أجل $n=3$ لأن $\sqrt{12}=3{,}46$.

والقيمة الأعظمية لـ $P(A)$ هي $\frac{9\times 30}{7140}=0{,}037$

ب) $P(B)=\frac{C_{2n}^3}{C_{36}^3}=\frac{2n\,(2n-1)\,(2n-2)}{42840}=\frac{2n\,(2n-1)\,(n-1)}{21420}$

$P(B)\rangle 0{,}6$ يعني $\frac{2n\,(2n-1)\,(n-1)}{21420}\rangle 0{,}6$

أي $2n(2n-1)(n-1) \rangle 12852$

بالقسمة على 2 نجد $n(n-1)(2n-1) \rangle 6426$ وهذه المتراجحة محققة ابتداءا من $n=16$

جـ) $P(C) = \dfrac{C^1_{36-2n} \times C^2_{2n}}{7140} = \dfrac{2n(36-2n)}{7140}$

تطبيق 25 قانون التوزيع المنتظم

نختار نقطة M عشوائيا من القطعة $[AB]$ بحيث $AB=1$

ما هو احتمال :

1) النقطة M تنتمي إلى $[CD]$.

2) M تكون قريبة من C أكثر من D

(0 ، 0.2 ، 0.8 ، 1 — A ، C ، D ، B)

✓ الحل :

1) X المتغير العشوائي الذي قيمه فواصل النقط M من القطعة $[AB]$

إذن X هو متغير عشوائي مستمر.

بما أن X يمسح المجال $[0,1]$ فإن دالة الكثافة هي $f(x)=1$.

إذن قانونه هو منتظم. وعليه نجد $P(0{,}2 \le X \le 0{,}8) = \int_{0{,}2}^{0{,}8} 1\, dx = 0{,}6$

2) الحادث " النقطة M تكون قريبة من C أكثر من D " هو الحادث " $0 \le X \le 0{,}5$ "

واحتماله هو $P(0 \le X \le 0{,}5) = 0{,}5$

تطبيق 26 قانون التوزيع المنتظم

تصل هدى إلى موقف الحافلات على الساعة الثامنة.

إذا علمت أن الحافلة التي تصل في لحظة ما تتبع قانونا منتظما ما بين الثامنة والثامنة والنصف.

-1 ما هو احتمال أن هدى تنتظر أكثر من 10 دقائق ؟

-2 إذا حانت الثامنة و 15 دقيقة ولم تصل بعد الحافلة ما هو احتمال أن انتظار هدى يدوم على الأقل 10 دقائق إضافية.

✓ الحل :

نسمي X المتغير العشوائي الذي قيمه الوقت الذي مضى ما بين 8 صباحا وزمن وصول الحافلة (وحدة الزمن هي الدقيقة).

($8h$ ، $8:30h$)

حسب الفرض X موزع بانتظام على المجال $[0,30]$

1) الحادث العكسي للحادث المفروض هو " $0 \langle X \le 10$ " واحتماله هو

$$P(0 \le X \le 10) = \frac{10-0}{30-0} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

إذن احتمال الحادث المفروض هو $1-P(0 \le X \le 10) = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

2) الحادث " هدى تنتظر على الأقل 10 دقائق إضافية " هو $(25 \le X \le 30)$ واحتماله هو

$$P(25 \le X \le 30) = \frac{30-25}{30-0} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

تطبيق 27 القانون الأسي

مدة حياة مركب إلكتروني هو متغير عشوائي T (معبر عنه بالأيام) الذي يتبع قانونا أسيا وسيطه $\lambda = 0{,}006$.

-1 ما هو احتمال أن واحدا من هذه المركبات يكون له حياة أكبر من 400 يوم ؟

-2 إذا علمت أنه عاش 400 يوما، ما هو احتمال أن يعيش 50 يوما إضافيا ؟

✓ الحل :

1) $P(X \ge 400) = e^{-\lambda \times 400} = e^{-0{,}006 \times 400}$

$= e^{-2{,}4} = 0{,}09$

2) $P(T \rangle 400+h \,/\, T \rangle 400) = P(T \rangle h)$

و h في هذه الحالة هو 50

إذن $P(T \rangle 50+h \,/\, T \rangle 400) = e^{-0{,}006 \times 50} = e^{-0{,}3} = 0{,}74$

تطبيق 28 مدة حياة عنصر كيميائي مشع

لتكن X مدة حياة عنصر كيميائي مشع بحيث X يتبع قانونا أسيا وسيطه λ

نعتبر أن نصف حياة C_6^{14} (كربون 14) هو $T=5568$ سنة.

أ) احسب $P(X \langle 200)$.

ب) احسب x علما أن $P(X \langle x)=0{,}3$.

✓ الحل :

أ) $P(X \langle 200) = \int_0^{200} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1-e^{-\lambda \times 200}$

لكن لدينا $T = \dfrac{Ln 2}{\lambda}$ ومنه $\lambda = T\, Ln 2 = 3859{,}44$

إذن $P(X < 200) = 1 - e^{-3859{,}44 \times 200} =$

ب) $P(X < x) = 0{,}3$ يكافئ $1 - e^{-\lambda x} = 0{,}3$

يكافئ $x = \frac{-Ln\, 0{,}7}{\lambda}$ يكافئ $x = 64057 \times 10^{-9}$

تطبيق 29 — مدة حياة آلة خياطة

مدة حياة آلة خياطة تتبع قانون أسي وسيطه $\lambda = 0{,}02$.

1- ما هو احتمال عدم تعطل هذه الآلة خلال 1000 ساعة الأولى من استعمالها ؟

2- إذا علمت أن هذه الآلة لم يحصل لها أي عطب خلال 1000 ساعة الأولى.
ما هو احتمال أن لا يحدث لها عطب خلال 5000 ساعة الأولى من استعمالها ؟

✓ الحل :

1) الحادث " عدم تعطل الآلة خلال 1000 ساعة الأولى من استعمالها " هو " $X > 1000$ "

$$P(X > 1000) = e^{-\lambda \times 1000} = e^{-0{,}02 \times 1000} = 2{,}06 \times 10^{-9}$$

2) احتمال أن لا يحدث عطب للآلة خلال 5000 ساعة علما أنه لم يحدث لها عطب خلال 1000 ساعة هو $P(X > 4000+1000 \,/\, X > 1000)$

$$P(X > 4000+1000 \,/\, X > 1000) = P(X > 4000) = e^{-0{,}02 \times 4000} = 1{,}8 \times 10^{-35}$$

تطبيق 30 — القانون الأسي ومدة حياة عنصر إلكتروني

مصنع ينتج ألعابا إلكترونية، نفرض أن T متغير عشوائي يمثل مدة حياة عنصر إلكتروني داخل في تركيب هذه الألعاب (بالأيام)، يتبع قانونا أسيا وسيطه $\frac{1}{700}$.

1- عين الدالة F المعرفة من $[0, +\infty[$ في $\mathbb{R}$ بحيث $F(t) = P(T \leq t)$

2- أ) ما هو احتمال أن العنصر الإلكتروني لا يحدث له عطب في الأربع الأشهر الأولى ؟

ب) احسب احتمال أن العنصر الإلكتروني يبقى يشتغل لمدة عامين.

ج) ما هو احتمال أن عنصر إلكتروني يبقى يشتغل حتى 5 سنوات، علما أنه اشتغل عامين ؟

د) خلال أي مدة زمنية يكون لدينا 10% من العناصر معطلة ؟

3- نقوم بإنتاج عنصرين إلكترونيين A و B لهذه اللعبة. وليكن T_A ، T_B متغيرين عشوائيين يمثلان مدتي حياة هذين العنصرين.

ولنفرض أن T_A و T_B مستقلين.

أ) احسب $P(T_A \geq 300)$.

ب) ما هو احتمال أن اللعبة تشتغل بعد 300 يوم من إنتاجها، علما أن العنصرين A و B مركبان على التسلسل ؟

ج) ما هو احتمال أن اللعبة تشتغل بعد 300 يوم من إنتاجها، علما أن العنصرين A و B مركبان على التفرع ؟ (اللعبة لا تشتغل إلا إذا كان كلا العنصرين معطلين).

✓ الحل :

1) بما أن T يتبع قانونا أسيا فإن دالة كثافته f معرفة على $[0, +\infty[$ ب $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(t)\,dt = 1 - e^{-\lambda t}$$

2) أ) العنصر الإلكتروني لا يحدث له عطب في الأربع الأشهر الأولى، هذا معناه أن مدة حياته أكبر من 4 أشهر. واحتماله هو $P(T > 120)$.

$$P(T > 120) = e^{-\frac{1}{700} \times 120} = 0{,}84$$

ب) $P(T > 730) = e^{-730 \times \frac{1}{700}} = 0{,}35$

ج) $P(T > 1825 \,/\, T > 730) = P(T > 1095)$

$$= e^{-1095 \times \frac{1}{700}} = 0{,}21$$

د) لتكن t المدة الزمنية التي تتعطل خلالها 10% من العناصر .
هذا يعني توجد 90% من العناصر مدة حياتها أكبر من t .
أي أنه إذا أخذنا أي عنصر من هذه العناصر فإن احتمال أن يبقى يشتغل بعد المدة t هو 0,9 . لكن $P(T > t)$ هو احتمال أن العنصر يبقى يشتغل بعد المدة t .
إذن $P(T > t) = 0{,}9$

$P(T > t) = 0{,}9$ تكافئ $e^{-\frac{1}{700}t} = 0{,}9$ تكافئ $t = 73{,}75$ يوم.

3) أ) $P(T_A \geq 300) = e^{-\frac{1}{700} \times 300} = 0{,}65$

ب) بما أن العنصرين A و B مركبين على التسلسل فإن اللعبة تشتغل إذا اشتغل كل من A و B .
وبالتالي احتمال أن اللعبة تشتغل بعد 300 يوم هو $P\big((T_A \geq 300) \cap (T_B \geq 300)\big)$
وبما أن المتغيرين T_A و T_B مستقلين فإن :

$$P_1 = P\big((T_A \geq 300) \cap (T_B \geq 300)\big) = P(T_A \geq 300) \times P(T_B \geq 300)$$
$$= 0{,}65 \times 0{,}65 = 0{,}42$$

ج) بما أن العنصرين A و B مركبين على التفرع فإن اللعبة تشتغل إذا اشتغل A أو B .
وبالتالي احتمال أن اللعبة تشتغل بعد 300 يوم هو $P\big((T_A \geq 300) \cup (T_B \geq 300)\big)$

$$P\big((T_A \geq 300) \cup (T_B \geq 300)\big) = P(T_A \geq 300) + P(T_B \geq 300) - P_1$$
$$= 0{,}65 + 0{,}65 - 0{,}42 = 0{,}87$$

تطبيق 31 — القانون الأسي

مدة حياة عنصر إلكتروني تتبع قانونا أسيا وسيطه λ .
لضمان حياة أطول لآلة إلكترونية تعوض هذا العنصر بعنصرين متماثلين A و B مركبين على التفرع، في هذه الحالة لا تتعطل الآلة إلا إذا تعطل كلا العنصرين.
نقبل أن تعطل العنصر A مستقل عن العنصر B .
مدة حياة الآلة الإلكترونية هو T .
نسمي T_A و T_B مدتي حياة العنصرين A و B على الترتيب.

1- برر المساواة $P(T\le t)=P(T_A\le t)\times P(T_B\le t)$
2- استنتج أن $P(T\le t)=(1-e^{-\lambda t})^2$
3- نفرض أن $\lambda=3\times10^{-2}$.
ما هو احتمال أن الآلة تشتغل أكثر من سنتين ؟
4- إذا كانت الآلة مركبة من ثلاث عناصر مربوطة على التفرع، ما هو احتمال أنها تشتغل أكثر من سنتين ؟

✓ الحل :

1) الآلة تتعطل قبل الزمن t إذا تعطل كلا العنصرين A و B .
- تكون مدة حياة الآلة أقل أو يساوي t إذا وفقط إذا كانت مدة حياة كلا العنصرين A و B أقل من أو يساوي t .
وهذا يعني أن $(T\le t)=(T_A\le t)\cap(T_B\le t)$
وعليه $P(T\le t)=P\left((T_A\le t)\cap(T_B\le t)\right)$
وبما أن الحادثين $(T_A\le t)$ و $(T_B\le t)$ مستقلين فإن: $P(T\le t)=P(T_A\le t)\times P(T_B\le t)$

2) بما أن $P(T_A\le t)=P(T_B\le t)$ فإن $P(T\le t)=\left[P(T_A\le t)\right]^2$
لكن $P(T_A\le t)=1-e^{-\lambda t}$ إذن $P(T\le t)=(1-e^{-\lambda t})^2$

3) لدينا $\lambda=3\times10^{-2}$
احتمال أن الآلة تشتغل أكثر من سنتين هو $P(T\ge 730)$
$P(T\ge730)=1-P(T\le730)=1-(1-e^{-3\times10^{-2}\times730})^2=6{,}16\times10^{-10}$

4) $P(T\ge730)=1-P(T\le730)=1-(1-e^{-3\times10^{-2}\times730})^3=9{,}25\times10^{-10}$

تطبيق 32 — القانون الأسي ومدة حياة عنصر الكتروني

يقوم مصنع بإنتاج عناصر إلكترونية.
نتقبل أن المتغير العشوائي T الذي يرفق بكل عنصر الكتروني أخذ عشوائيا من العناصر المنتجة بمدة حياته t المعبر عنها بالساعات، يتبع قانونا أسيا وسيطه λ .

1- ليكن $F(t)$ احتمال أن العنصر الإلكتروني لم يحدث له عطب حتى اللحظة t .
أكتب $F(t)$ بدلالة t .
2- إذا علمت أن $F(500)=0{,}80$ ، اعط القيمة الدقيقة للوسيط λ ثم قيمة مقربة له إلى 10^{-4}
3- احسب بتقريب 10^{-2} احتمال أن مدة حياة عنصر تتجاوز 2008 ساعة.

✓ الحل :

1) $F(t)=P(T\le t)=1-e^{-\lambda t}$

2) $F(500)=0{,}80$ يكافئ $e^{-500t}=0{,}2$ يكافئ $\lambda=-\frac{Ln\,0{,}2}{500}$
$\lambda=-\frac{Ln\,0{,}2}{500}=0{,}0014=14\times10^{-4}$

3) احتمال أن مدة حياة عنصر تتجاوز 2008 ساعة هو $P(T\ge2008)$
$P(T\ge2008)=e^{-14\times10^{-4}\times2008}=0{,}06$

تطبيق 33 — القانون الأسي وقانون ثنائي الحد

تقوم مؤسسة بكراء سيارات في منطقة جبلية، هذه السيارات تتوقف على الطريق لأسباب خارجية عدة، منها سقوط أحجار، مرور قطيع من الحيوانات ... إلخ.
تنطلق سيارة من مرابها وليكن D متغير عشوائي الذي يقيس بالكيلومتر المسافة التي ستقطعها هذه السيارة حتى يحدث لها حادث.
نقبل أن D يتبع قانونا أسيا وسيطه $\frac{1}{80}$.
في كل هذا التمرين النتائج مدورة إلى 10^{-3} .

1- احسب احتمال أن المسافة المقطوعة بدون حادث تكون :
أ) محصورة بين 50 و 100 كيلومتر.
ب) أكبر من 300 كيلومتر.
2- إذا علمت أن هذه السيارة قطعت 350 كيلومتر بدون توقف (بدون حادث)، ما هو احتمال أنه لا يحدث لها توقف خلال $25\ Km$ المقبلة ؟
3- أ) باستعمال التكامل بالتجزئة احسب $I(A)$ حيث :
$I(A)=\int_0^A \frac{1}{82}xe^{-\frac{x}{82}}dx$ حيث A عدد حقيقي موجب.
ب) احسب $\lim_{A\to+\infty} I(A)$ (هذه النهاية تمثل المسافة المتوسطة المقطوعة بدون حادث).
4- المؤسسة تملك N_0 سيارة والمسافات المقطوعة من طرف كل سيارة ما بين خروجها من المراب حتى مكان حدوث سبب لتوقفها، هي متغيرات عشوائية مستقلة مثنى مثنى تتبع قانونا أسيا وسيطه $\lambda=\frac{1}{82}$.

d عدد حقيقي موجب، وليكن X_d المتغير العشوائي الذي يساوي عدد السيارات التي لم يحدث لها حادث بعد قطعها مسافة d كيلومتر.

أ) بين أن X_d يتبع قانون ثنائي الحد وسيطيه N_0 و $e^{-\lambda d}$

ب) اعط متوسط عدد السيارات التي لم يحدث لها أي حادث بعد قطعها $d\ Km$.

الحل :

1) أ) $P(50 \le D \le 100)=\int_{50}^{100}\frac{1}{82}e^{-\frac{x}{82}}dx=\left[-e^{-\frac{x}{82}}\right]_{50}^{100}=0{,}248$

ب) $P(D\ge 300)=1-P(D\le 300)=1-\int_{0}^{300}\frac{1}{82}e^{-\frac{x}{82}}dx=0{,}026$

2) احتمال أن السيارة تقطع $25\ Km$ إضافية علما أنها قطعت $350\ Km$ هو :

$P(D\ge 375 / D\ge 350)$

$P(D\ge 375 / D\ge 350)=P(D\ge 25)=e^{-\frac{25}{82}}\approx 0{,}737$

3) أ) بوضع $U(x)=x$ ، $V(x)=-e^{-\frac{x}{82}}$ يكون $U'(x)=1$ و $V'(x)=\frac{1}{82}e^{-\frac{x}{82}}$

$$I(A)=\left[-xe^{-\frac{x}{82}}\right]_0^A-\int_0^A -e^{-\frac{x}{82}}dx=-Ae^{-\frac{A}{82}}-\left[82e^{-\frac{x}{82}}\right]_0^A$$

$$=-Ae^{-\frac{A}{82}}-82e^{-\frac{A}{82}}+82$$

ب) بما أن $\lim_{A\to+\infty}e^{-\frac{A}{82}}\times A=0$ و $\lim_{A\to+\infty}e^{-\frac{A}{82}}=0$ فإن $\lim_{A\to+\infty}I(A)=82$

4) أ) التجربة E_1 هي قطع مسافة من طرف سيارة ونراقب هل تتعرض لحادث أم لا .
نكرر هذه التجربة N_0 مرة ونسجل في كل مرة عدد السيارات التي لم يحدث لها أي حادث بعد قطعها مسافة $d\ Km$.
التجارب مستقلة عن بعضها البعض ومتماثلة.
لكل سيارة مختارة لها إمكانيتين :

- إما السيارة لم يحدث لها أي حادث بعد قطعها مسافة $d\ Km$ ونسمي هذا الحادث S (نجاح).
واحتماله هو $P(S)=P(D\ge d)=e^{-\frac{d}{82}}$
- إما السيارة يحدث لها على الأقل توقف، هذا الحادث نسميه $\overline{S}$
واحتماله هو $P(\overline{S})=1-P(S)=1-e^{-\frac{d}{82}}$

X_d هو المتغير العشوائي الذي يساوي عدد السيارات التي لم يحدث لها حادث خلال قطعها المسافة $d\ Km$ ، أي عدد مرات تحقق الحادث S .

إذن X_d يتبع قانون ثنائي الحد وسيطيه N_0 و $p=e^{-\frac{d}{82}}$

ب) متوسط عدد السيارات التي لم يحدث لها أي حادث بعد قطعها مسافة d هو $E(X_d)$.

$E(X_d)=N_0\times p=N_0e^{-\frac{d}{82}}$

تطبيق 34 تلاؤم معطيات مع نموذج احتمالي

1- عجلة سحرية مقسمة إلى ثلاثة أجزاء مرقمة على التوالي 1 ، 2 ، 3. النتائج المتحصل عليها خلال 300 لعبة مدونة في الجدول التالي :

1	2	3
101	107	92

- احسب d^2 مجموع مربعات الفروق بين التواترات الملاحظة والتواترات النظرية.

2- لمعرفة إن كانت هذه العجلة تعطينا أرقاما عشوائية أم لا . وهذا بعتبة مجازفة 10% قمنا بمحاكاة التجربة السابقة 2000 مرة. وفي كل مرة حسبنا d^2 فتحصلنا على سلسلة عشريها التاسع (D_9) هو 3×10^{-3} .
ماذا تستنتج ؟

الحل :

1) بما أن العجلة مقسمة إلى ثلاثة أجزاء فإن كل الأرقام لها نفس الحظوظ نظريا أي:

$P(1)=P(2)=P(3)=\frac{1}{3}$

تواترات الأرقام 1، 2، 3 هي f_1 ، f_2 ، f_3 حيث $f_3=\frac{92}{300}$ ، $f_2=\frac{107}{300}$ ، $f_1=\frac{101}{300}$

إذن $d^2=(f_1-\frac{1}{3})^2+(f_2-\frac{1}{3})^2+(f_3-\frac{1}{3})^2$

$=(\frac{101}{300}-\frac{1}{3})^2+(\frac{107}{300}-\frac{1}{3})^2+(\frac{92}{300}-\frac{1}{3})^2$

$=\frac{1+7^2+8^2}{(300)^2}=\frac{114}{90000}=1{,}26\times10^{-3}$

2) بما أن $d^2\le D_9$ فإن المعطيات متلائمة مع النموذج النظري بعتبة مجازفة 10% أي أن العجلة غير مغشوشة (متزنة).

تطبيق 35 القانون الأسي

يقوم رئيس مصلحة الحالة المدنية لبلدية بن طلحة في نهاية السنة بتفحص دفاتر الولادات وهذا بحساب عدد البنات والبنين المولودين خلال تلك السنة.
النتائج المحصل عليها مدونة في الجدول التالي :

البنين	البنات
113	129

السؤال المطروح هو : هل هذه المعطيات متلائمة مع الفرضية " حظوظ ازدياد بنت هو نفس

حظوظ ازدياد ولد " ؟
لذلك قام بمحاكاة التجربة المتمثلة في تكرار 242 مرة سحب رقما عشوائيا من رقمين.
بعد إنجاز 6000 محاكاة حسبنا في كل مرة d^2 فتحصلنا على السلسلة الإحصائية للقيم $10^4 \times d^2$ التي نتائجها مدونة في الجدول الجانبي.

D_1	Q_1	Med	Q_3	D_9
0.27	7.8	22.1	42.3	54.6

بعتبة مجازفة 10% هل نستطيع تقبل الفرض الذي طرحه رئيس المصلحة ؟

✓ الحل :

بما أن حظ ازدياد ولد يساوي حظ ازدياد بنت فإن احتمال كل منهما يساوي $\frac{1}{2}$.

f_1 ، f_2 تواتري ازدياد بنت وازدياد ولد على التوالي.

$f_1=\frac{113}{242}$ و $f_2=\frac{129}{242}$

لدينا $d^2=(f_1-\frac{1}{2})^2+(f_2-\frac{1}{2})^2 = 21.85 \times 10^{-4}$

بما أن $10^4 \times d^2 < D_9$ فإن المعطيات متلائمة مع الفرضية بعتبة مجازفة 10%.

تطبيق 36 تلاؤم معطيات مع نموذج احتمالي

I - حجر نرد رباعي الوجوه منتظم له وجه أبيض ووجهين حمراوين ووجه أخضر. نفرض أن الحجر متزن.
لعبة تتمثل في رمي هذا الحجر مرتين متتاليتين وبصفة مستقلة .
وفي كل رمية نسجل لون الوجه المخفي ولنعتبر الأحداث التالية :
E هو الحادث " الوجهان المتحصل عليهما خضراوين" .
F هو الحادث " الوجهان لهما نفس اللون".

1- احسب احتمالي الحادثين E و F وكذلك احتمال E علما F .

2- نقوم بعشرة لعبات متماثلة ومستقلة.
احسب احتمال التحصل على الأقل مرتين على الحادث F خلال هذه العشرة لعبات. (تعطى النتائج مقربة إلى 10^{-3}).

II - نريد معرفة إن كان الحجر المستعمل متزن أم لا، لذلك نرقم أوجهه بالأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 . ثم نرمي هذا الحجر 160 مرة وندون العدد n_i عدد مرات ظهور الوجه i (i الوجه المخفي).
فتحصلنا على النتائج التالية :

الوجه i	التكرار n_i
1	30
2	48
3	46
4	32

ليكن f_i تواتر الوجه i و d^2 العدد الحقيقي المعرف بـ $d^2=\sum_{i=1}^{4}(f_i-\frac{1}{4})^2$
نحاكي 1000 مرة التجربة التي تتمثل في سحب رقم عشوائي 160 مرة من بين عناصر المجموعة $\{1,2,3,4\}$ ولكل محاكاة نسحب العدد d^2
العشري التاسع (D_9) للسلسلة الإحصائية لـ 1000 قيمة لـ d^2 يساوي 0,0098 .
بعتبة مجازفة 10% هل يمكن اعتبار هذا الحجر متزن ؟

✓ الحل :



I-1) عدد الحالات الممكنة هي $4\times4=16$

- عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث E هي 1

ومنه $P(E)=\frac{1}{16}$

- عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث F هي 6

ومنه $P(F)=\frac{6}{16}$

لدينا $P_F(E)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}$.

الحادث $E\cap F$ هو :
" الحصول على وجهين يحملان نفس اللون الأخضر".
إذن $E\cap F=E$

وبالتالي $P_F(E)=\frac{P(E)}{P(F)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{6}{16}}=\frac{1}{6}$

الرمية الأولى الرمية الثانية



2) لتكن التجربة رمي حجر النرد مرتين متتاليتين مستقلتين. وليكن F و $\overline{F}$ مخرجيها نكرر هذه التجربة عشرة مرات.

بما أن التجارب متماثلة ومستقلة فيما بينها. واحتمال النجاح F في كل تجربة هو $p=\frac{1}{16}$

واحتمال الرسوب $\overline{F}$ هو $\frac{15}{16}$ فإننا نستطيع تطبيق قانون ثنائي الحد الذي وسيطيه $p=\frac{1}{16}$ و $n=10$.

ليكن A الحادث "الحصول على F مرتين على الأقل" و $\overline{A}$ هو الحادث العكسي للحادث A
$\overline{A}$ هو الحادث " التحصل على الوجه F على الأكثر مرة"

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-(C_{10}^{0}\,p^0 q^{10}+C_{10}^{1}\,p^1 q^9)$
$=1-(q^{10}+10\,p\,q^9)=1-q^9(q+10\,p)$

$$=1-(\frac{15}{16})^{9}(\frac{15}{16}+\frac{10}{16})=1-(\frac{15}{16})^{9}(\frac{25}{16})=0{,}126$$

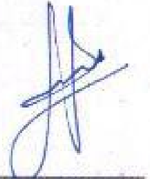
II - بما أن الحجر له أربعة أوجه لها نفس حظ الظهور فإن احتمال ظهور كل وجه هو $\frac{1}{4}$ (نظريا).

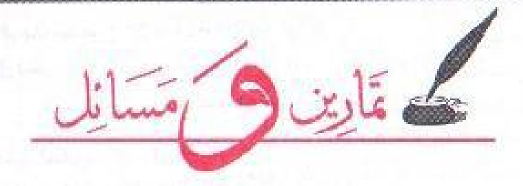
$$f_4=\frac{32}{160} \text{ ، } f_3=\frac{46}{160} \text{ ، } f_2=\frac{48}{160} \text{ ، } f_1=\frac{30}{160}$$

$$d^2=\sum_{i=1}^{4}(f_i-\frac{1}{4})^2=(\frac{30}{160}-\frac{1}{4})^2+(\frac{48}{160}-\frac{1}{4})^2+(\frac{46}{160}-\frac{1}{4})^2+(\frac{32}{160}-\frac{1}{4})^2$$

$$d^2=\frac{100+64+36+64}{(160)^2}=\frac{264}{(160)^2}=0{,}0103$$

بما أن $d^2 \rangle D_9$ فإن المعطيات غير متلائمة مع النموذج الاحتمالي المفترض بعتبة مجازفة 10% .





1 - 1) كم لجنة مكونة من ثلاثة أعضاء يمكن انتخابها من بين 20 شخصا ؟

2) كم عدد المجموعات الجزئية المشكلة من ثلاثة عناصر من مجموعة تشمل A ، B ، C ، D ، E ، F ؟ ثم عين كل هذه المجموعات الجزئية.

2 - 10 نقط موزعة في مستو بحيث أي ثلاث نقط كيفية منها لا تقع على استقامة واحدة.

أ) كم من مستقيم يمكننا تشكيله وذلك بربط النقط مثنى مثنى ؟

ب) كم يوجد من شعاع مبدؤه ونهايته هما نقطتان مختلفتان من بين 10 نقط ؟

(الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ مختلفان)

جـ) كم مثلث يمكن تشكيله ؟

3 - في قسم مشكل من 15 بنتا و 13 ولدا نريد اختيار ممثلين :

أ) كم طريقة يمكننا بها اختيار هذين الممثلين ؟

ب) كم طريقة يمكننا بها اختيار ولد و بنت ؟

جـ) كم طريقة يمكننا بها اختيار ولدين ؟

د) كم طريقة يمكننا بها اختيار بنتين ؟

هـ) كم طريقة يمكننا بها اختيار ولد على الأقل ؟

4 - نرمي ثلاث مرات متتالية حجر النرد أوجهه مرقمة من 1 إلى 6 .

1) ما هو عدد النتائج الممكنة ؟

2) كم عدد الطرق الممكنة لتشكيل أعداد لها نفس الأرقام ؟

3) كم عدد الطرق الممكنة لتشكيل عدد له ثلاثة أرقام مختلفة ؟

4) كم عدد الطرق التي يمكن بها أن نشكل أعدادا مؤلفة من رقمين ؟

5 - كيس يحتوي على n كرة بيضاء و n كرة سوداء نسحب n كرة في آن واحد (n غير معدوم).

1) ما هو عدد النتائج الممكنة ؟

2) p عدد طبيعي بحيث $0 \le p \le n$

بين أن $(C_n^p)^2$ هو عدد إمكانيات الحصول على p كرة بيضاء.

3) استنتج قيمة المجموع $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+...+(C_n^n)^2$

4) باستعمال نشر $(1+x)^{2n}$ بين أن $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+...+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$

6 - 1) انشر كثير الحدود $F(x)=(1+x)^n$

2) استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$n\,(1+x)^{n-1}=C_n^1+2\,C_n^2\,x+3\,C_n^3\,x^2+...+n\,C_n^n\,x^{n-1}$

ثم استنتج المجموع $S=C_n^1+2\,C_n^2+3\,C_n^3+....+n\,C_n^n$

7 جمعية تشمل n عضوا، نشكل من اعضائها لجنة مكونة من p عنصرا ، ومن هذه اللجنة نشكل مكتبا من q عنصرا، ومن هذا المكتب نشكل امانة مكونة من r عنصرا
بين أن $C_n^p\times C_p^q\times C_q^r = C_n^r\times C_{n-r}^{q-r}\times C_{n-q}^{p-q}$ وهذا باستعمال تجميع كل الطرق المختلفة.

8 - (U_n) متتالية معرفة بـ $U_0=1$ و $U_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}$ مع $n\rangle 0$

1) نفرض أن $n\geq 3$

أ) بين أن $U_n=2+\frac{2}{n}+\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{C_n^k}$

ب) بين انه من اجل كل k بحيث $n-2\geq k\geq 2$ يكون $C_n^k\geq\frac{n(n-1)}{2}$

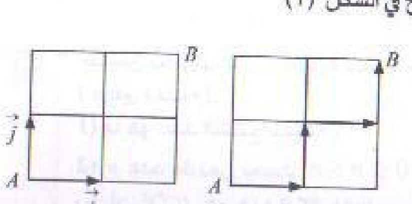
2) استنتج من السؤال (1) حصرا للعدد U_n ، ثم بين أن نهاية (Un) هي 2

9 - نضع $f(x)=x\,(1+x)^n$ مع n عدد طبيعي غير معدوم

1) انشر $f(x)$

2) احسب $f'(x)$ بطريقتين مختلفتين ، ثم استنتج عبارة $\sum_{k=0}^{n}(k+1)\,C_n^k$

10 - 1) نستطيع التحرك على شبكة مربعة الشكل أبعادها 2×2 منسوبة إلى معلم متعامد ومتجانس $(A\,,\vec{i}\,,\vec{j})$ كما هو موضح في الشكل (1)
النقطة B إحداثياتها $(2\,,2)$
نسمي أصغر مسلك من A إلى B
كل تتابع لأربع أشعة $\vec{j}$ أو $\vec{i}$
بحيث مجموعها يساوي $\overrightarrow{AB}$.



فمثلا التتابع $(\vec{j}\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{i})$ في الشكل (2) .
هو أصغر مسلك من A إلى B
ارسم كل المسالك الأصغرية الممكنة من A إلى B
ثم أوجد طريقة لمعرفة عددها.

2) في هذا السؤال نتحرك على شبكة مربعة الشكل أبعادها (4×4) ، B نقطة إحداثياتها $((4\,،4))$
كم عدد الطرق الأصغرية الممكنة من A إلى B
ب) كم عدد هذه الطرق التي تمر بالنقطة O مركز الشبكة .

B
A

11 - برنامج مسابقة يشمل 40 موضوعا، 4 مواضيع تختار عشوائيا وتعرض على المتسابقين ، على كل مترشح معالجة واحد من المواضيع الأربعة المختارة.

1) مترشح لم يراجع إلا $\frac{1}{4}$ من المواضيع المدرجة في المسابقة.

أ) احسب احتمال أن المترشح لم يراجع ولا موضوعا واحدا من المواضيع الأربعة المختارة.
ب) احسب احتمال انه راجع على الأقل موضوعا واحدا من المواضيع المختارة .

2) اجب على نفس السؤال السابق وهذا بفرض أن المترشح راجع نصف المواضيع المدرجة في المسابقة.

12 - كيس يحتوى على 7 كرات بيضاء و 7 كرات خضراء و 5 كرات حمراء . نختار عشوائيا وفي نفس الوقت 5 كرات.

1)ما هو احتمال أن يكون من بين الخمسة الكرات المختارة 3 كرات بيضاء ؟
2)ما هو احتمال الحادث "من بين الكرات المختارة ثلاث حمراء " ؟
3) ما هو احتمال الحادث "الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون" ؟

13 - في محطة خروبة للحافلات ، اشترى 13 مسافر تذاكر، 4 منها باتجاه قسنطينة و 4 منها باتجاه تمنراست و 5 باتجاه بجاية.
نختار عشوائيا ثلاثة مسافرين .
ما هو احتمال كل حادث من الحوادث التالية :
A " ثلاثة مسافرين لهم اتجاهات مختلفة "
B " ثلاثة مسافرين يتوجهون إلى بجاية "
C " ثلاثة مسافرين لهم نفس الاتجاه "
D " مسافر واحد على الأقل يتجه نحو قسنطينة "

14 - نضع في كيس 7 قصاصات على كل منها مكتوب حرف من حروف كلمة " $SOFIANE$ ". نسحب على التوالي ثلاث قصاصات ونرتبها حسب ترتيب ظهورها من

اليسار إلى اليمين، نشكل عندئذ كلمة من ثلاثة أحرف.
ما هو احتمال التحصل على كلمة "son" ؟
ما هو احتمال أن الكلمة المشكلة تنتهي بواحد من الحروف التالية O ، I ، E ، A ؟

15 - حجر نرد مغشوش (غير متزن) بحيث :
$P(1)=P(4)=P(3)=P(5)=0,15$, $P(2)=0,1$, $P(6)=0,3$
نرمي هذا الحجر مرتين متتاليتين ونسجل في كل مرة رقم الوجه العلوي.
X هو المتغير العشوائي الذي قيمه مجموع الرقمين الظاهرين على الوجه العلوي
1) اعط قانون احتمال X
2) احسب $E(X)$ ، $V(X)$ ، $\sigma(X)$

16 - يلتقي تاجر متنقل بـ 20 شخصا يوميا، احتمال أن يشترى واحد منهم هو 0,2 مما يعرضه عليهم.
1) ما هو احتمال أن التاجر لا يبيع لأي شخص خلال يوم ؟
2) ما هو احتمال أن يبيع لشخصين على الأقل ؟

17 - نرمي قطعة نقدية متزنة، احسب احتمال الحوادث التالية :
أ) الحصول على الظهر مرة واحدة على الأقل وذلك عندما نقوم بـ 6 رميات.
ب) الحصول على الظهر مرة واحدة على الأكثر وذلك عند القيام بـ 6 رميات.
جـ) الحصول على الظهر مرتين على الأقل وذلك عند القيام بـ 10 رميات.
د) الحصول على نفس عدد الأظهر والأوجه خلال 10 رميات.

18 - مجلس مكون من 8 اشخاص وكل عضو منه يشارك مرة واحدة في كل اجتماعين.
احسب احتمال الحوادث التالية :
أ) 8 اشخاص حاضرون في الاجتماع .
ب) هناك اكثر من 3 اشخاص حاضرون في الاجتماع .
جـ) هناك على الأقل 4 اشخاص حاضرون في الاجتماع.

19 - احتمال ازدياد بنت هو نفس احتمال ازدياد ولد .
1) ما هو احتمال أن يكون عدد الإناث اكبر من عدد الذكور في عائلة ذات ثلاثة اطفال ؟
2) اجب عن نفس السؤال إذا علمت أن عدد أولاد العائلة هو 7.

20 - مصنع ينتج براغي منها 7% مشوهة .
علبة تحتوي على 25 برغيا. وجود تشوه في برغي مستقل عن اختياره .

1) ما هو احتمال أن العلبة لا تحتوي على أي برغي مشوه ؟
2) ما هو احتمال أن العلبة تحتوي على الأقل 12 برغيا غير مشوه ؟

21 - يقوم بائع متجول بعرض صهاريج تخزين المياه في المناطق الجبلية بحيث يلتقي بعشرة زبائن يوميا، نقبل أن احتمال بيع صهريج لزبون هو $\frac{1}{7}$ وأن قرار شراء كل زبون مستقل عن الآخرين.
X هو عدد الصهاريج المباعة يوميا.
1) برر أن قانون X هو قانون ثنائي الحد ثم عين وسيطيه .
2) اعط عبارة $P(X=k)$ من أجل $0 \le k \le n$
ثم احسب $P(X=0)$ ، $P(X=2)$ ، $P(X=4)$.
3-1) احسب $E(X)$.
ب) التاجر يربح $500\ DA$ لكل صهريج، ما هو الربح المتوسط الذي يتوقعه هذا التاجر (استعمال متغير عشوائي آخر Y)

22 - احتمال أن قناصا يبلغ هدفه هو 0,85 .
1) خلال خمس طلقات مستقلة عن بعضها البعض ما هو احتمال أن القناص يبلغ هدفه على الأقل مرتين ؟
2) كم يجري من طلقة حتى يكون احتمال إصابة الهدف هو اكبر من 0,92 على الأقل مرة ؟

23 - يقوم مصنع بإنتاج برامج الكمبيوتر، وبينت دراسة حول نوعية هذه البرامج أن 4% منها يوجد بها خلل. يقوم تاجر في الإعلام الآلي بطلبية مكونة من 100 برنامج، وليكن X هو عدد البرامج الموجودة في هذه الطلبية والتي بها خلل.
1) ما هو قانون احتمال X ؟
2) احسب $P(X=k)$ من أجل k ينتمي إلى $\{0,1,2,3\}$

24 - هناك 4 حظوظ من بين 40 لاكتشاف بئر بترول في منطقة حاسي مسعود.
1) نقوم بـ 15 عملية تنقيب. ما هو احتمال أن نتحصل على :
أ) اكتشاف واحد .
ب) 5 اكتشافات .
جـ) على الأقل 4 اكتشافات .
د) أقل من 4 اكتشافات .
هـ) اكثر من 5 اكتشافات.
2) كم من عملية تنقيب يجب إدراجها حتى يكون لدينا 39 حظا من بين 40 للحصول

على الأقل على اكتشاف واحد ؟

3) كم يصبح احتمال نجاح عملية التنقيب إذا علمت أنه في هذه المنطقة لدينا 39 حظا من بين 40 للتحصل على الأقل على اكتشاف واحد من بين 20 تنقيبا ؟

---

25 - مصنع ينتج ساعات. خلال عملية الإنتاج من الممكن حدوث نوعين من الخلل نرمز لهما بـ a و b وهذا بصفة مستقلة.

5% من الساعات بها العطب a و 7% بها العطب b .

نختار عشوائيا ساعة من الإنتاج ونعرف الحوادث التالية :

A " الساعة المختارة بها العطب a "

B " الساعة المختارة بها العطب b "

C " الساعة المختارة لا يوجد فيها اي عطب "

D " الساعة المختارة بها عطب واحد "

1) احسب احتمال الحادثين C و D

2) خلال عملية الإنتاج نختار عشوائيا وعلى التوالي 5 ساعات ولنعتبر أن عدد الساعات المنتجة كبير بالقدر الكافي بحيث نستطيع أن نفرض أن السحابات تنجز بالإرجاع وبصفة مستقلة.

وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل اختيار عدد الساعات التي ليس بها اي عطب ونرمز بـ E إلى الحادث " 4 ساعات على الأقل ليس بها اي عطب "

احسب احتمال E .

---

26 - في امتحان نستعمل طريقة سؤال باختيارات متعددة نهتم بـ 10 أسئلة مستقلة عن بعضها البعض.

نرفق بكل سؤال 4 اختيارات مرقمة $1,2,3,4$ حيث ان واحدة منها فقط صحيحة.

من اجل كل سؤال يجب على المترشح شطب اختيار من بين الأربعة اختيارات بحيث يكون الجواب صحيحا إذا شطب على الرقم الصحيح .

1) مترشح يجيب على الأسئلة بشكل عشوائي (الأربعة اختيارات متساوية الاحتمال)

أ) احسب احتمال كل حادث من الأحداث التالية :

A " المترشح يجيب صحيحا على السؤال الأول من العشرة أسئلة "

B " المترشح يجيب صحيحا على الأقل على اثنين من بين 10 أسئلة "

ب) نمنح نقطتين لكل جواب صحيح و (-1) لكل جواب خاطئ.

احسب احتمال الحادث C "المترشح يتحصل على الأقل على 10 نقط في الأسئلة العشرة ".

2) نفرض الآن أن المترشح يعرف الأجوبة الصحيحة للسؤالين الأولين ويجيب عشوائيا على الثمانية الأخرى .

ما هو احتمال الحادث C ؟

27 - X متغير عشوائي يتبع قانون منتظم ومستمر على المجال $[0,1]$

عين احتمال كل حادث من الحوادث التالية :

$B=\{X > 0,07\}$ ، $A=\{X < 0,3\}$ ، $C=\{X=0,5\}$ ، $D=\{0,09 > X > 0,01\}$

---

28 - X متغير عشوائي مستمر على المجال $[0,+\infty[$ يساوى مدة الحياة بالأعوام لآلة غسيل ملابس مع $\lambda=0,02$.

1) ما هو احتمال أن هذه الآلة تتعطل قبل 10 سنوات ؟

2) ماهو احتمال انها تتعطل لأول مرة بعد 10 سنوات من الخدمة ؟

---

29 - يحتوي مخبر فيزياء بثانوية على مجموعة من كاشفات التذبذب متماثلة. مدة الحياة بالأعوام لكاشف تذبذب هو متغير عشوائي نرمز له بـ X الذي يتبع قانونا أسيا وسيطه $\lambda > 0$

1) إذا علمت ان $P(X > 10)=0,286$

بين أن $0,125$ هي القيمة المقربة إلى 10^{-3} للعدد λ

2) في كل ما يلي $\lambda=0,125$

احسب احتمال أن الكاشف له مدة حياة أقل من 6 اشهر .

3) إذا علمت أن الجهاز اشتغل 8 أعوام فما هو احتمال أن تكون مدة حياته اكبر من 10 سنوات.

---

30 - الوقت اللازم بالساعات لإصلاح آلة يتبع قانونا أسيا وسيطه $\lambda=0,05$

1) ما هو احتمال أن وقت إصلاح الآلة يتجاوز الساعتين ؟

2)ما هو احتمال أن عملية إصلاح الآلة تستغرق على الأقل 10 ساعات إذا علمت أنها استغرقت 9 ساعات من قبل ؟

---

31 - مؤسسة A مختصة في إنتاج دراجات نارية، عملية مراقبة الجودة بينت أن كل منتوج يمكن أن يكون فيه خللين.

- خلل في التلحيم احتماله يساوى $0,03$ وآخر في عنصر كهربائي احتماله هو $0,02$. المراقبة بينت كذلك أن الخللين مستقلين.

نقول أن الدراجة غير صالحة إذا كان بها على الأقل أحد الخللين.

1- بين أن احتمال أن تكون الدراجة غير صالحة هو $0,0494$.

2- بائع الجملة يستقبل 800 دراجة من المؤسسة A .وليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه عدد الدراجات غير الصالحة من بين 800 دراجة.

أ) بين أن X يتبع قانون ثنائي الحد .

ب) احسب الأمل الرياضي واعط معنى له.

3-أ) تاجر صغير يقوم بطلبية 25 دراجة، احسب بتقريب 10^{-3} احتمال أن تكون